

La tabla 6-1 ilustra la aplicación de las ecuaciones 6-1, 6-2, 6-5 y 6-6 para algunos casos comunes de carga. Ninguno de esos resultados debería memorizarse sino *estudiarse cuidadosamente* para entender con claridad cómo se construyen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante con base en el conocimiento de la *variación de la pendiente* en los diagramas de carga y fuerza cortante, respectivamente. Valdría la pena el esfuerzo y el tiempo invertido en comprobar su entendimiento de estos conceptos, cubriendo las columnas de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la tabla y tratar de reconstruir esos diagramas con base en el conocimiento de la carga.

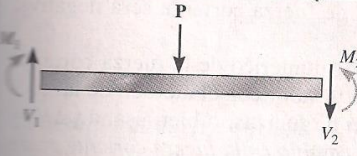
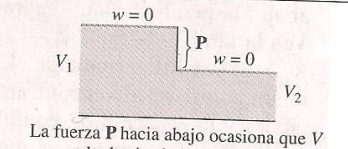
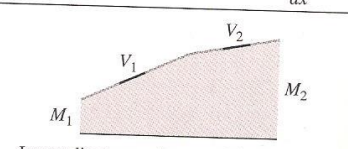
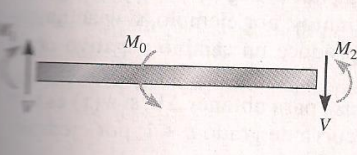
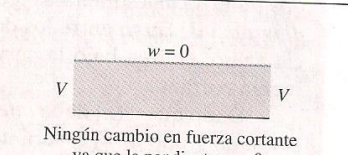
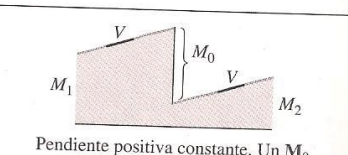
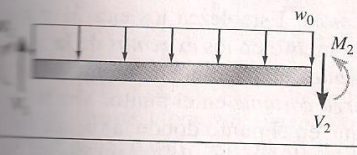
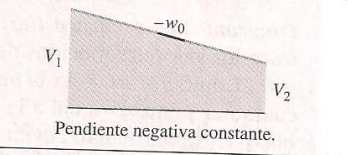
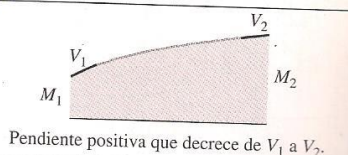
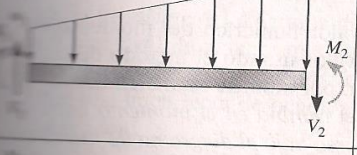
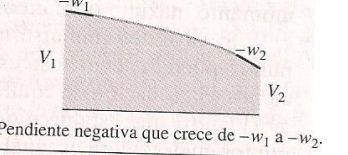
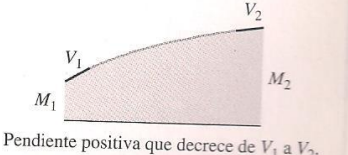
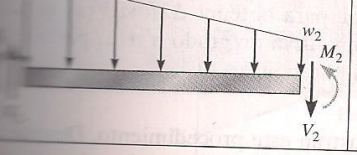
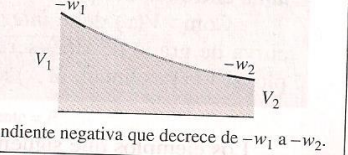
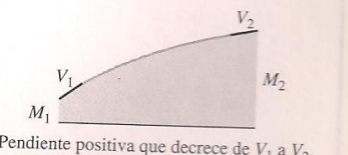
Carga	Diagrama de fuerza cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de momento flexionante $\frac{dM}{dx} = V$
	 <p>La fuerza P hacia abajo ocasiona que V salte hacia abajo de V_1 a V_2.</p>	 <p>La pendiente constante cambia de V_1 a V_2.</p>
	 <p>Ningún cambio en fuerza cortante ya que la pendiente $w = 0$.</p>	 <p>Pendiente positiva constante. Un M_0 antihorario ocasiona que M salte hacia abajo.</p>
	 <p>Pendiente negativa constante.</p>	 <p>Pendiente positiva que decrece de V_1 a V_2.</p>
	 <p>Pendiente negativa que crece de $-w_1$ a $-w_2$.</p>	 <p>Pendiente positiva que decrece de V_1 a V_2.</p>
	 <p>Pendiente negativa que decrece de $-w_1$ a $-w_2$.</p>	 <p>Pendiente positiva que decrece de V_1 a V_2.</p>

Tabla 6-1

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento constituye un método para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga con base en las relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flexionante.

Reacciones en los soportes. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga y determine las reacciones en los soportes. Descomponga las fuerzas que actúan sobre la viga en componentes perpendiculares y paralelas al eje de la viga.

Diagrama de fuerza cortante. Establezca los ejes V y x y trace los valores conocidos de la fuerza cortante en los dos extremos de la viga.

Como $dV/dx = -w$, la pendiente del diagrama de fuerza cortante en cualquier punto es igual al valor (negativo) de la intensidad de la carga distribuida en el punto; por ejemplo, si w actúa hacia abajo, la pendiente del diagrama de fuerza cortante será negativa. Vea la tabla 6-1.

Si debe determinarse el valor numérico de la fuerza cortante en un punto, puede encontrarse este valor con el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de fuerzas, o bien usando $\Delta V = -\int w(x) dx$, que establece que el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera es igual al valor (negativo) del área bajo el diagrama de carga entre los dos puntos; por ejemplo, si w actúa hacia abajo, el área bajo la curva produce un cambio negativo en la fuerza cortante.

Dado que $w(x)$ debe integrarse para obtener ΔV , si $w(x)$ es una curva de grado n , $V(x)$ será una curva de grado $n + 1$; por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme, $V(x)$ será lineal.

Diagrama de momento flexionante. Establezca los ejes M y x y trace los valores conocidos del momento en los extremos de la viga.

Como $dM/dx = V$, la pendiente del diagrama de momentos en cualquier punto es igual a la fuerza cortante en el punto. Vea la tabla 6-1. En particular, advierta que en el punto donde la fuerza cortante es cero, $dM/dx = 0$, y por tanto éste puede ser un punto de momento máximo o mínimo.

Si va a determinarse un valor numérico del momento en el punto, puede encontrarse este valor usando el método de las secciones y la ecuación de equilibrio por momentos, o bien usando $\Delta M = \int V(x) dx$, que establece que el cambio en el momento entre dos puntos cualesquiera es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los dos puntos.

Como $V(x)$ debe integrarse para obtener ΔM , si $V(x)$ es una curva de grado n , $M(x)$ será una curva de grado $n + 1$; por ejemplo, si $V(x)$ es lineal, $M(x)$ será parabólica.

Los ejemplos que siguen ilustran este procedimiento. Después de estudiarlos con detenimiento sería recomendable que los ejemplos 6-1 a 6-6 también se resolvieran usando este método.

EJEMPLO 6-7

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en la figura 6-13a.

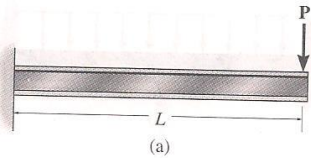


Figura 6-13

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones se calculan y se muestran sobre un diagrama de cuerpo libre, figura 6-13b.

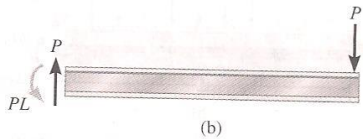


Diagrama de fuerza cortante. Se traza primero la fuerza cortante en cada extremo de la viga. De acuerdo con la convención de signos, figura 6-3, en $x = 0$, $V = +P$ y en $x = L$, $V = +P$, figura 6-13c. Como $w = 0$ para $0 < x < L$, la *pendiente* del diagrama de fuerza cortante será cero ($dV/dx = -w = 0$) en todo punto, por lo que una línea recta conectará los puntos extremos.

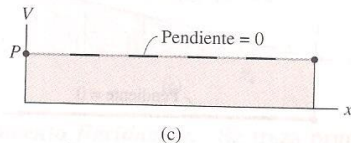
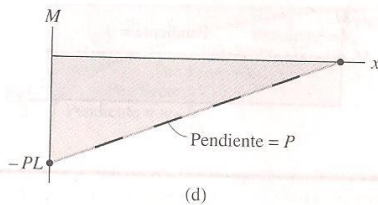


Diagrama de momento flexionante. Se traza primero el momento flexionante en cada extremo de la viga, es decir, en $x = 0$, $M = -PL$ y en $x = L$, $M = 0$, figura 6-13d. El diagrama de fuerza cortante indica que la *pendiente* del diagrama de momento será *constante-positiva* para $0 < x < L$, de manera que esta pendiente es $dM/dx = V = +P$ en todo punto. Por consiguiente, los puntos extremos están conectados por una línea recta de pendiente positiva como se muestra en la figura 6-13d.



EJEMPLO 6-8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 6-14a.

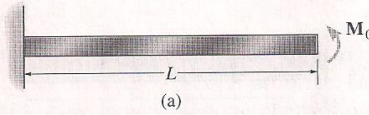


Figura 6-14

SOLUCIÓN

Reacciones en el soporte. La reacción en el empotramiento se ha calculado y se muestra sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 6-14b.

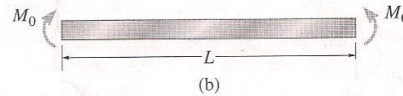


Diagrama de fuerza cortante. Se trazan primero las fuerzas cortantes $V = 0$ en cada punto extremo, $x = 0$ y $x = L$, figura 6-14c. Como no existe ninguna carga distribuida sobre la viga para $0 < x < L$, el diagrama de fuerza cortante tendrá *pendiente* cero, $dV/dx = -w(x) = 0$ en todo punto. Por tanto, una línea horizontal conecta los puntos extremos, lo que indica que la fuerza cortante es cero en toda la viga.

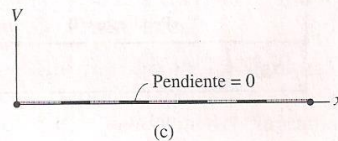
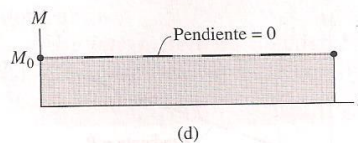
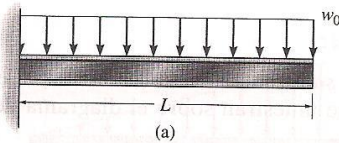


Diagrama de momento flexionante. El momento M_0 en los puntos extremos de la viga, $x = 0$ y $x = L$, se grafica primero en la figura 6-14d. El diagrama de fuerza cortante indica que la *pendiente* del diagrama de momento será cero para $0 < x < L$, ya que $dM/dx = V = 0$. Por consiguiente, una línea horizontal conecta los puntos extremos, como se muestra.



EJEMPLO 6-9

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 6-15a.


Figura 6-15
SOLUCIÓN

Reacciones en el soporte. Las reacciones en el empotramiento se han calculado y se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 6-15b.

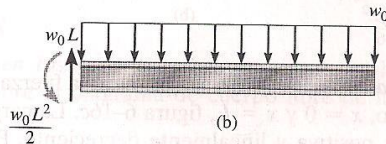


Diagrama de fuerza cortante. Se traza primero la fuerza cortante en cada punto extremo, $x = 0$ y $x = L$, figura 6-15c. La carga distribuida sobre la viga es constante-positiva, y como $dV/dx = -w_0$, la *pendiente* del diagrama de fuerza cortante será constante-negativa. Una línea recta de pendiente negativa conecta entonces los puntos extremos.

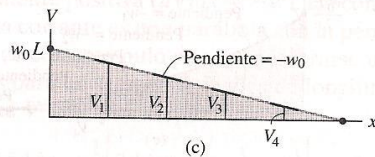
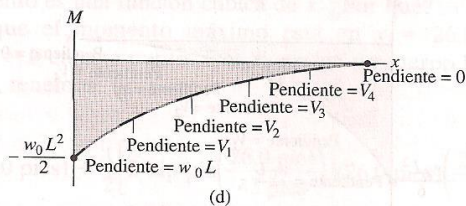


Diagrama de momento flexionante. Se traza primero el momento flexionante en cada punto extremo, $x = 0$ y $x = L$, figura 6-15d. Valores sucesivos de la fuerza cortante sobre el diagrama de cortante indican que la *pendiente* del diagrama de momento será siempre positiva, pero linealmente decreciente, del valor $dM/dx = w_0 L$ en $x = 0$ al valor $dM/dx = 0$ en $x = L$. Como el diagrama de fuerza cortante es *lineal*, el diagrama de momento flexionante será *parabólico* con una *pendiente* linealmente decreciente, según se muestra en la figura.



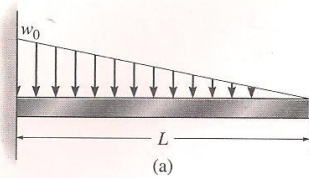


Figura 6-16

EJEMPLO 6-10

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 6-16a.

SOLUCIÓN

Reacciones en el soporte. Las reacciones en el empotramiento se han calculado y se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 6-16b.

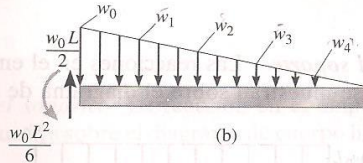


Diagrama de fuerza cortante. Se traza primero la fuerza cortante en cada punto extremo, $x = 0$ y $x = L$, figura 6-16c. La carga distribuida sobre la viga es positiva y linealmente decreciente. Por tanto, la pendiente del diagrama de fuerza cortante será decreciente negativamente del valor $dV/dx = -w_0$ en $x = 0$ al valor $dV/dx = 0$ en $x = L$. Como la carga tiene una distribución lineal, el diagrama de cortante es una parábola con pendiente decreciente negativa.

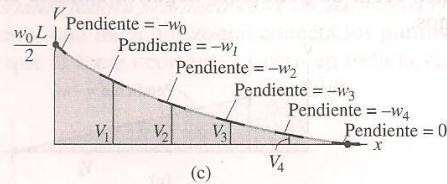
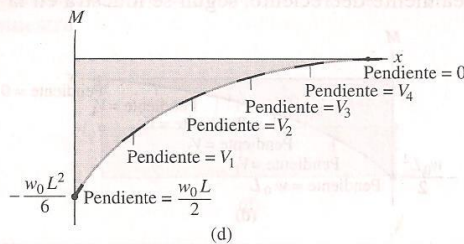
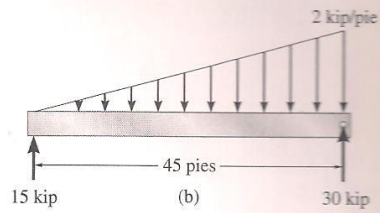
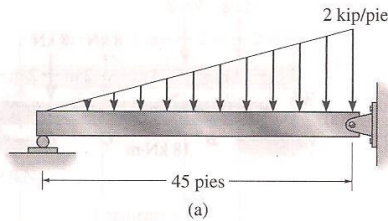


Diagrama de momento flexionante. Se traza primero el momento en cada punto extremo, $x = 0$ y $x = L$, figura 6-16d. En el diagrama de fuerza cortante, la pendiente del diagrama de momento será parabólica, esto es, siempre será positiva pero decreciente, de $dM/dx = +w_0 L / 2$ en $x = 0$ a $dM/dx = 0$ en $x = L$. La curva que conecta los puntos extremos que tiene esta característica es una función cúbica de x , como se muestra en la figura.



EJEMPLO 6-11

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en la figura 6-17a.



SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones se han calculado y se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre de la viga en la figura 6-17b.

Diagrama de fuerza cortante. Se trazan primero los puntos extremos $x = 0, V = +15$ y $x = 45, V = -30$, figura 6-17c. Como se muestra en la distribución de carga de la viga, la pendiente del diagrama de fuerza cortante variará de $dV/dx = 0$ en $x = 0$ a $dV/dx = -2$ en $x = 45$. En general, para $0 \leq x \leq 45$, la pendiente del diagrama de fuerza cortante será *crecientemente negativa* ya que la carga distribuida es crecientemente positiva ($dV/dx = -w$). En consecuencia, el diagrama de fuerza cortante es una parábola con la pendiente mostrada.

El punto de cortante nulo puede encontrarse usando el método de las secciones para un segmento de viga de longitud x , figura 6-17e. Requerimos que $V = 0$, por lo que:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 15 \text{ kip} - \frac{1}{2} \left[2 \text{ kip/pie} \left(\frac{x}{45 \text{ pies}} \right) \right] x = 0; \quad x = 26.0 \text{ pies}$$

Diagrama de momento flexionante. Se trazan primero los puntos extremos $x = 0, M = 0$ y $x = 45, M = 0$, figura 6-17d. Según el diagrama de fuerza cortante, la pendiente del diagrama de momentos será $dM/dx = 15$ en $x = 0$ y $dM/dx = -30$ en $x = 45$. En general, para $0 \leq x \leq 26.0$, la *pendiente será decrecientemente positiva*, ya que la fuerza cortante es decrecientemente positiva. Igualmente, para $26.0 \leq x \leq 45$, la *pendiente será crecientemente negativa*. Aquí el diagrama de momento es una función cúbica de x . ¿Por qué?

Note que el momento máximo está en $x = 26.0$, ya que $dM/dx = V = 0$ en este punto. Del diagrama de cuerpo libre en la figura 6-17e, tenemos:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M = 0; \\
 -15 \text{ kip}(26.0 \text{ pies}) + \frac{1}{2} \left[2 \text{ kip/pie} \left(\frac{26.0 \text{ pies}}{45 \text{ pies}} \right) \right] (26.0 \text{ pies}) \left(\frac{26.0 \text{ pies}}{3} \right) \\
 + M = 0 \quad M = 260 \text{ kip} \cdot \text{pie}
 \end{aligned}$$

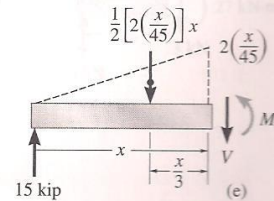
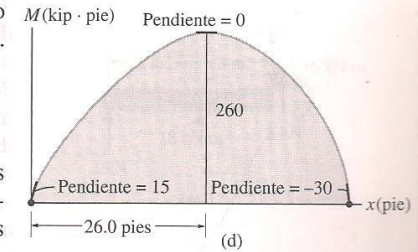
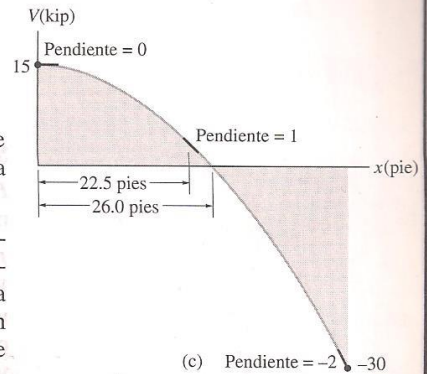


Figura 6-17

EJEMPLO 6-12

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 6-18a.

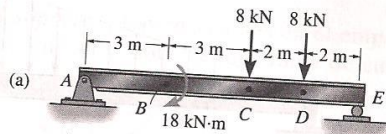


Figura 6-18

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre en la figura 6-18b.

Diagrama de fuerza cortante. En $x = 0$, $V_A = +3$ kN y en $x = 10$, $V_E = -13$ kN, figura 6-18c. En un punto intermedio entre A y C, $w(x) = 0$, por lo que la pendiente del diagrama de fuerza cortante será cero, $dV/dx = -w(x) = 0$. Por tanto, la fuerza cortante retiene su valor de $+3$ kN dentro de esta región hasta el punto C. En C la fuerza cortante es *discontinua*, ya que ahí se tiene una *fuerza concentrada* de 8 kN. El valor de la fuerza cortante justo a la derecha de C (-5 kN) puede encontrarse seccionando la viga en este punto. Este valor ($V = -5$ kN) se traza sobre el diagrama de fuerza cortante. Igual que antes, $w(x) = 0$ de C a D y de D a E, figura 6-18b, por lo que la *pendiente* del diagrama de fuerza cortante será cero en esas regiones. El diagrama “salta” nuevamente en D, como se muestra, y llega a E con el valor -13 kN. Advierta que ningún “salto” o discontinuidad tiene lugar en B, punto en que está aplicado el momento concentrado de 18 kN·m. La razón de esto puede mostrarse al considerar el equilibrio del diagrama de cuerpo libre en la figura 6-18f.

Debe observarse que con base en la ecuación 6-5, el diagrama de fuerza cortante puede también construirse “siguiendo la carga” en el diagrama de cuerpo libre. Comenzando en A, la fuerza de 3 kN actúa hacia arriba, de modo que $V_A = +3$ kN. Ninguna carga distribuida actúa entre A y C, por lo que la fuerza cortante permanece constante ($dV/dx = 0$). En C, la fuerza de 8 kN actúa hacia abajo, de tal manera que la fuerza cortante salta hacia abajo 8 kN, de $+3$ kN a -5 kN. Nuevamente, la fuerza cortante es constante de C a D (ninguna carga distribuida), luego en D salta hacia abajo otros 8 kN al valor -13 kN. Finalmente, sin carga distribuida entre D y E, termina en -13 kN en el punto E.

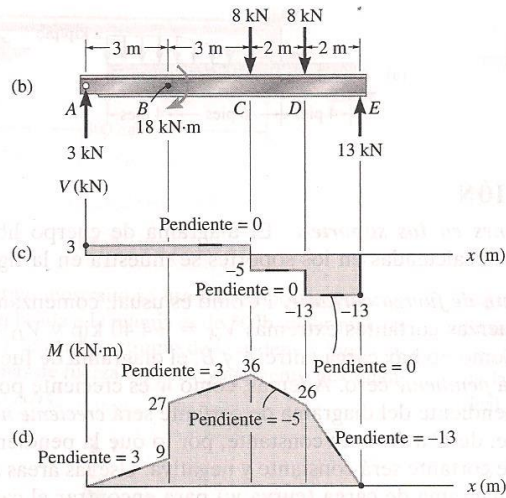
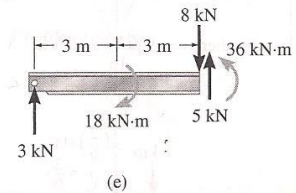
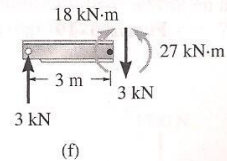


Diagrama de momento flexionante. El momento en cada extremo de la viga es cero, figura 6-18d. De acuerdo con el diagrama de fuerza cortante, la *pendiente* del diagrama de momentos de A a C es constante con valor de +3. El valor del momento justo a la izquierda de B puede determinarse usando el método de las secciones y la estática o calculando el área bajo el diagrama de cortante entre A y B, esto es, $\Delta M_{AB} = M_B - M_A = (3 \text{ kN})(3 \text{ m}) = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Como $M_A = 0$, entonces $M_B^- = 0 + 9 \text{ kN} \cdot \text{m} = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Un salto ocurre en el punto B debido al momento concentrado de $18 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Usando la ecuación 6-6, este salto es de $18 \text{ kN} \cdot \text{m}$ hacia arriba, ya que el momento concentrado es *horario*. También el método de las secciones, figura 6-18f, da el mismo valor de $M_B^+ = + 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$ justo a la derecha de B. Desde este punto, la *pendiente* de $dM/dx = + 3$ se mantiene hasta que el diagrama alcanza un pico de $36 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Nuevamente, este valor puede obtenerse usando el método de las secciones o encontrando el área bajo el diagrama de cortante entre B y C, esto es, $\Delta M_{BC} = (3 \text{ kN})(3\text{m}) = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$, por lo que $M_C = 27 \text{ kN} \cdot \text{m} + 9 \text{ kN} \cdot \text{m} = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Prosiguiendo de esta manera, verifique el valor de $26 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en D con cierre a cero en E.



(e)



(f)

EJEMPLO 6-13

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga con voladizo mostrada en la figura 6-19a.

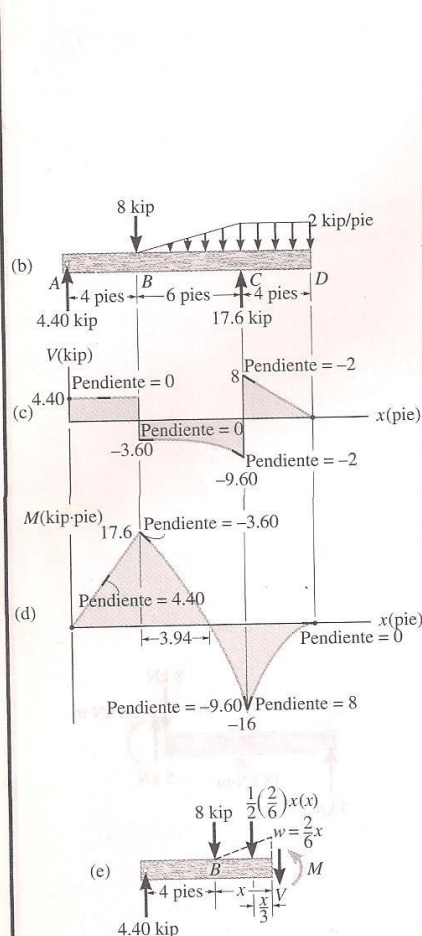


Figura 6-19

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. El diagrama de cuerpo libre con las reacciones calculadas en los soportes se muestra en la figura 6-19b.

Diagrama de fuerza cortante. Como es usual, comenzamos trazando las fuerzas cortantes extremas $V_A = +4.40$ kip y $V_D = 0$, figura 6-19c. Como no hay carga entre A y B, el diagrama de fuerza cortante tendrá *pendiente* cero. Además, como w es creciente positiva de B a C, la *pendiente* del diagrama de cortante será *creciente negativa*. Finalmente, de C a D, w es constante, por lo que la *pendiente* del diagrama de cortante será constante y negativa. Use las áreas apropiadas bajo el diagrama de carga (curva w) para encontrar el cambio en la fuerza cortante. Por ejemplo, $\Delta V_{BC} = -(1/2)(6 \text{ pies})(2 \text{ kip/pie}) = -6$ kip, por lo que $V_C = -3.60$ kip $- 6$ kip = -9.60 kip justo a la izquierda del punto C.

Diagrama de momento flexionante. Se trazan primero los momentos extremos $M_A = 0$ y $M_D = 0$, figura 6-19d. Estudie el diagrama y note cómo las *pendientes* y por consiguiente las diversas curvas se establecen a partir del diagrama de fuerza cortante usando $dM/dx = V$. Verifique los valores numéricos de los picos usando el método de las secciones y estática o calculando las áreas apropiadas bajo el diagrama de fuerza cortante para encontrar el cambio en el momento. Observe que el punto de momento cero puede determinarse estableciendo M en función de x , donde, por conveniencia, x se extiende desde punto B en la región BC, figura 6-19e. Por tanto,

$$\uparrow \sum M = 0;$$

$$-4.40 \text{ kip}(4 \text{ pies} + x) + 8 \text{ kip}(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{2 \text{ kip/pie}}{6 \text{ pies}} \right) x(x) \left(\frac{x}{3} \right) + M = 0$$

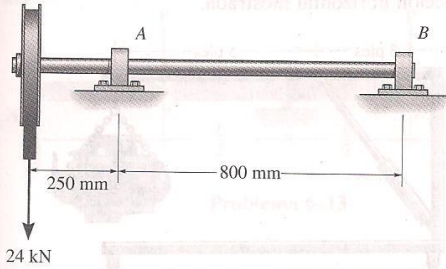
$$M = \left(-\frac{1}{18}x^3 - 3.60x + 17.6 \right) \text{ kip} \cdot \text{pie} = 0$$

$$x = 3.94 \text{ pies}$$

Revisando estos diagramas vemos que, debido al proceso de integración para la región AB, la carga es cero, la fuerza cortante es constante y el momento es lineal; para la región BC, la carga es lineal, la fuerza cortante es parabólica y el momento es cúbico; para la región CD, la carga es constante, la fuerza cortante es lineal y el momento es parabólico.

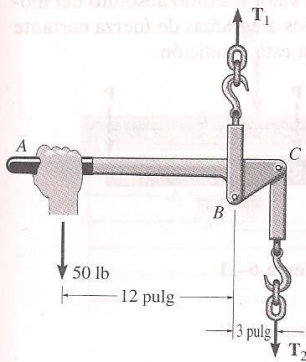
PROBLEMAS

6-1 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la flecha. Las chumaceras en A y en B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



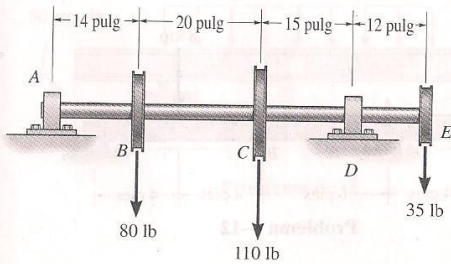
Problema 6-1

6-2 El dispositivo mostrado se usa para soportar una carga. Si la carga aplicada a la manija es de 50 lb, determine las tensiones T_1 y T_2 en cada extremo de la cadena y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el brazo ABC .



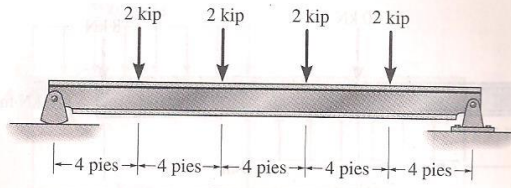
Problema 6-2

6-3 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la flecha. Las chumaceras en A y en D ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha. La carga está aplicada a las poleas en B , C y E .



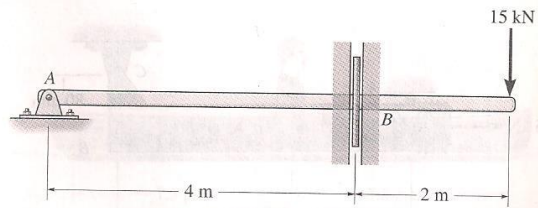
Problema 6-3

*6-4 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



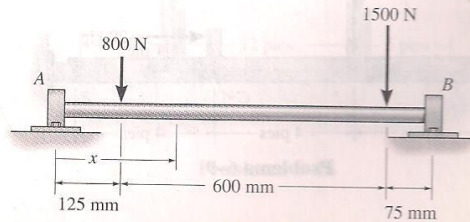
Problema 6-4

6-5 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la barra que está soportada por un pasador en A y por una placa lisa en B . La placa se desliza dentro de la ranura, por lo que no puede soportar una fuerza vertical, pero sí puede soportar un momento.



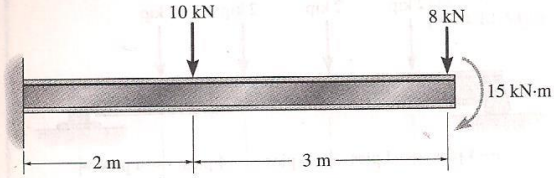
Problema 6-5

6-6 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la flecha. Las chumaceras en A y en B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha. Expresé también la fuerza cortante y el momento flexionante en la flecha en función de x dentro de la región $125 \text{ mm} < x < 725 \text{ mm}$.



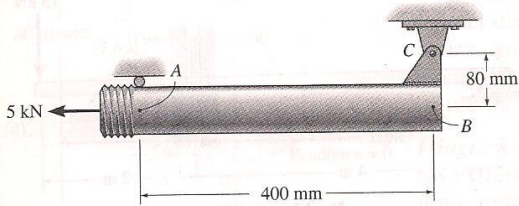
Problema 6-6

6-7 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



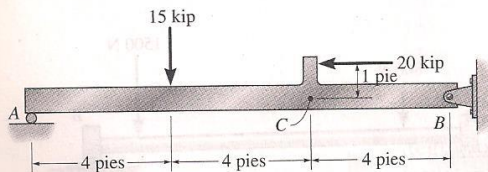
Problema 6-7

*6-8 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el tubo, uno de cuyos extremos está sometido a una fuerza horizontal de 5 kN. *Sugerencia:* Las reacciones en el pasador C deben reemplazarse por cargas equivalentes en el punto B sobre el eje del tubo.



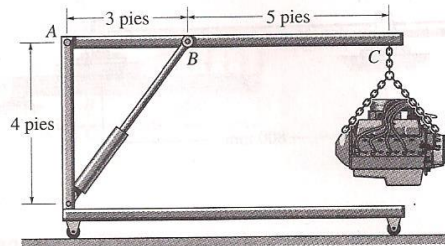
Problema 6-8

6-9 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. *Sugerencia:* La carga de 20 kip debe reemplazarse por cargas equivalentes en el punto C sobre el eje de la viga.



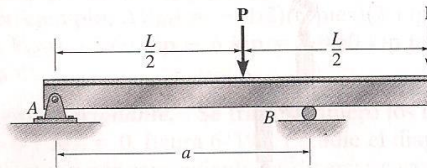
Problema 6-9

6-10 La grúa pescante se usa para soportar el motor que tiene un peso de 1200 lb. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el brazo ABC cuando está en la posición horizontal mostrada.



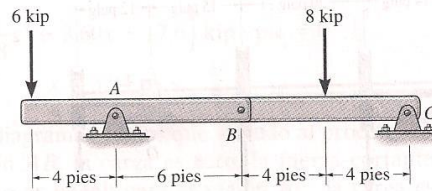
Problema 6-10

6-11 Determine la distancia a en que debe colocarse el soporte de rodillo para que el valor máximo absoluto del momento sea mínimo. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta condición.



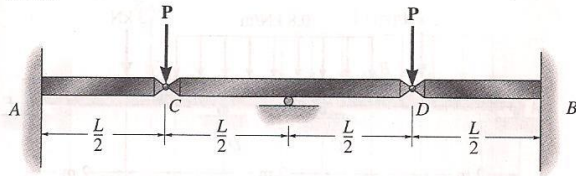
Problema 6-11

*6-12 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga compuesta que está conectada en B por un pasador, soportada por un pasador en A y empotrada en C.



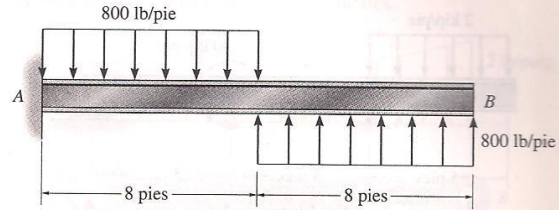
Problema 6-12

6-13 Las barras están conectadas por pasadores en C y en D. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el conjunto. Desprecie el efecto de carga axial.



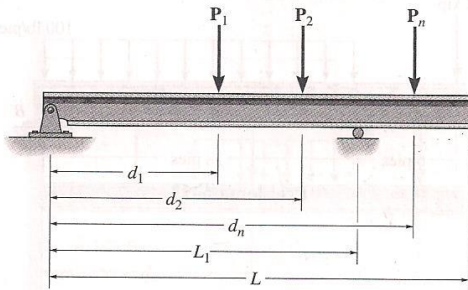
Problema 6-13

*6-16 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



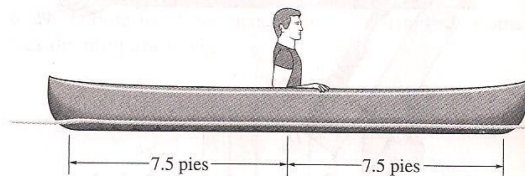
Problema 6-16

6-14 Considere el problema general de una viga simplemente apoyada sometida a n cargas concentradas. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante en cualquier posición x especificada a lo largo de la viga y trace los diagramas correspondientes para la viga. Muestre una aplicación del programa usando los valores $P_1 = 500$ lb, $d_1 = 5$ pies, $P_2 = 800$ lb, $d_2 = 15$ pies, $L_1 = 10$ pies, $L = 15$ pies.



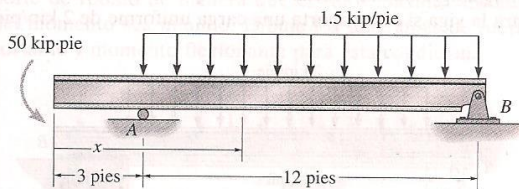
Problema 6-14

6-17 El hombre de 150 lb de peso está sentado en el centro de la lancha que tiene un ancho uniforme y un peso por pie lineal de 3 lb. Determine el momento flexionante máximo ejercido sobre la lancha. Suponga que el agua ejerce un carga uniforme distribuida hacia arriba sobre el fondo de la lancha.



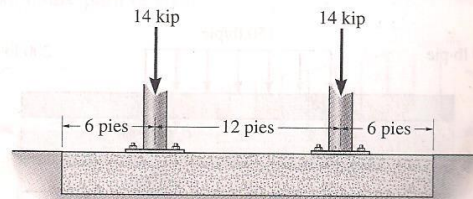
Problema 6-17

6-15 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. Determine también la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x , donde 3 pies $< x \leq 15$ pies.



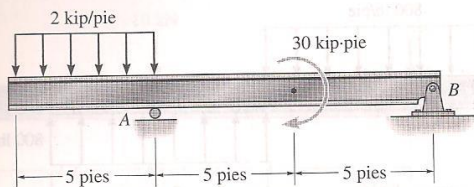
Problema 6-15

6-18 La zapata de cimentación soporta la carga transmitida por las dos columnas. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la zapata si la reacción de la presión del suelo sobre la zapata se supone uniforme.



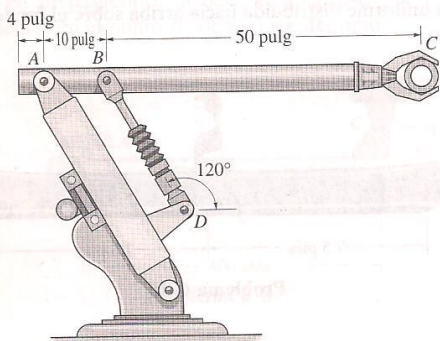
Problema 6-18

6-19 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



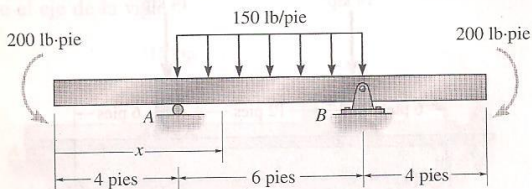
Problema 6-19

*6-20 El robot industrial se mantiene en la posición estacionaria indicada. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del brazo ABC que está conectado en A por un pasador y a un cilindro hidráulico BD (miembro de dos fuerzas). Suponga que el brazo y las tenazas tienen un peso uniforme de 1.5 lb/pulg y que soportan la carga de 40 lb en C.



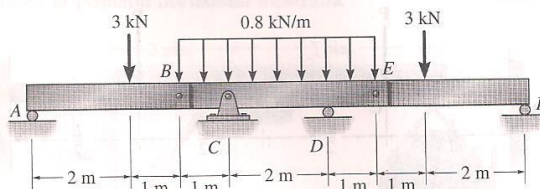
Problema 6-20

6-21 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga y determine la fuerza cortante y el momento en la viga como funciones de x , para $4 \text{ pies} < x < 10 \text{ pies}$.



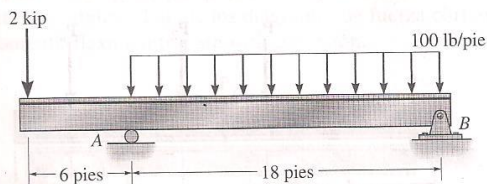
Problema 6-21

6-22 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga compuesta. Los tres segmentos están conectados por pasadores en B y en E.



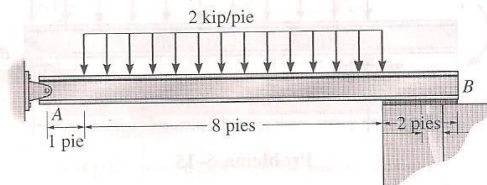
Problema 6-22

6-23 La viga T está sometida a la carga mostrada. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga.



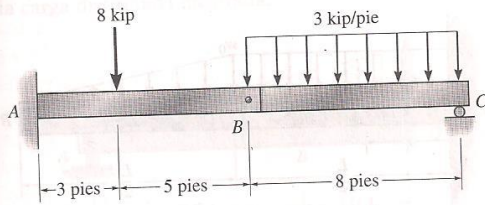
Problema 6-23

*6-24 La viga está soportada en A por un pasador y descansa sobre un cojinete en B que ejerce una carga uniforme distribuida sobre la viga en sus dos pies de longitud. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga si ésta soporta una carga uniforme de 2 kip/pie.



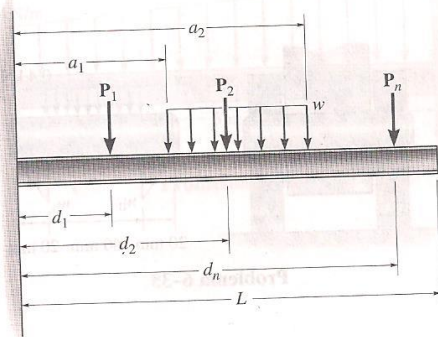
Problema 6-24

6-25 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. Los dos segmentos están unidos entre sí en B.



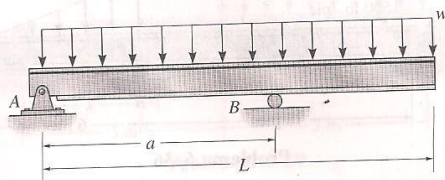
Problema 6-25

6-26 Considere el problema general de una viga en voladizo sometida a n cargas concentradas y a una carga w uniformemente distribuida. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante en cualquier posición x especificada a lo largo de la viga; trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga. Aplique el programa usando los valores $P_1 = 4$ kN, $d_1 = 2$ m, $w = 800$ N/m, $a_1 = 2$ m, $a_2 = 4$ m, $L = 4$ m.



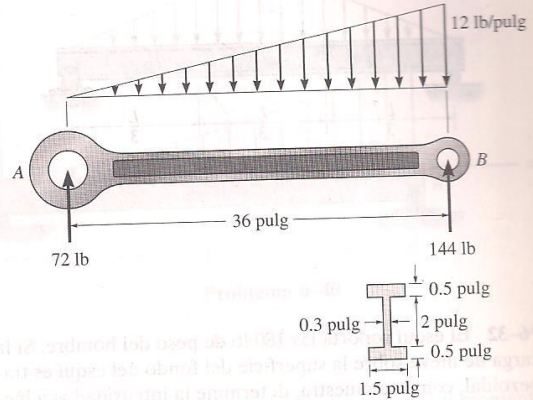
Problema 6-26

6-27 Determine la distancia a en que debe colocarse el soporte de rodillo de manera que el valor máximo absoluto del momento sea mínimo. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta condición.



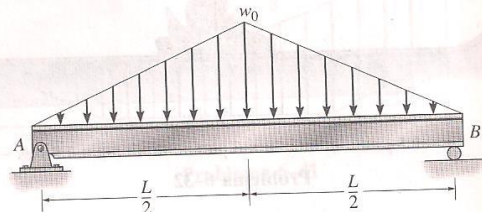
Problema 6-27

*6-28 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la barra de conexión. En los extremos A y B sólo se presentan reacciones verticales.



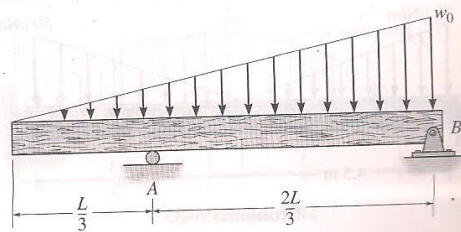
Problema 6-28

6-29 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



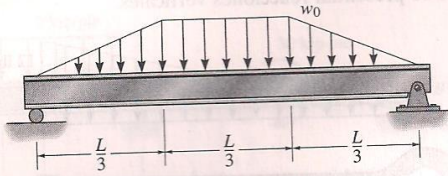
Problema 6-29

6-30 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



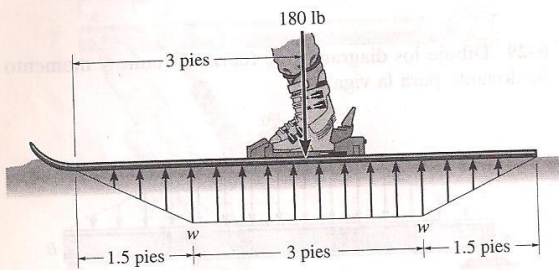
Problema 6-30

6-31 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



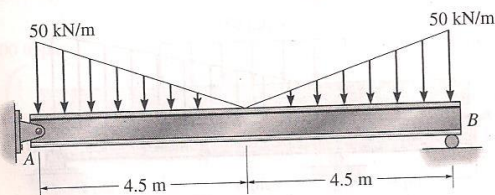
Problema 6-31

*6-32 El esquí soporta las 180 lb de peso del hombre. Si la carga de nieve sobre la superficie del fondo del esquí es trapezoidal, como se muestra, determine la intensidad w y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el esquí.



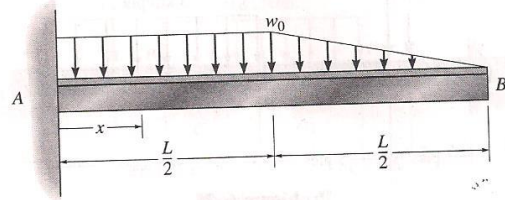
Problema 6-32

6-33 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



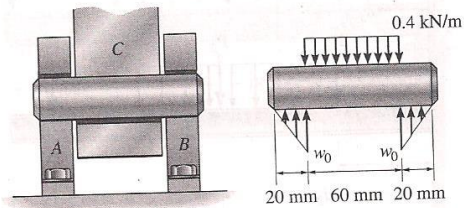
Problema 6-33

6-34 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga y determine la fuerza cortante y el momento en la viga como funciones de x .



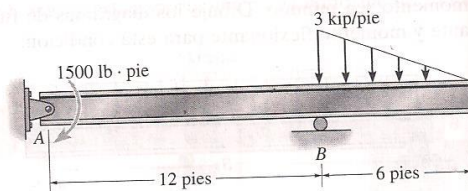
Problema 6-34

6-35 El pasador liso está soportado por dos silletas A y B y está sometido a una carga de compresión de 0.4 kN/m causada por la barra C. Determine la intensidad de la carga distribuida w_0 de las silletas sobre el pasador y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el pasador.



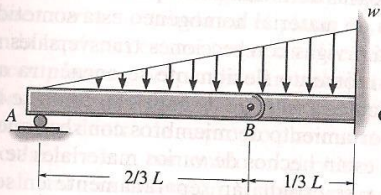
Problema 6-35

*6-36 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



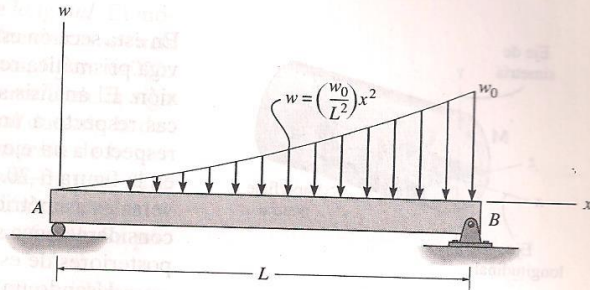
Problema 6-36

6-37 La viga compuesta consta de dos segmentos unidos entre sí por un pasador en B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga que soporta la carga distribuida mostrada.



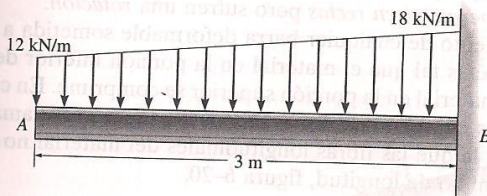
Problema 6-37

*6-40 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



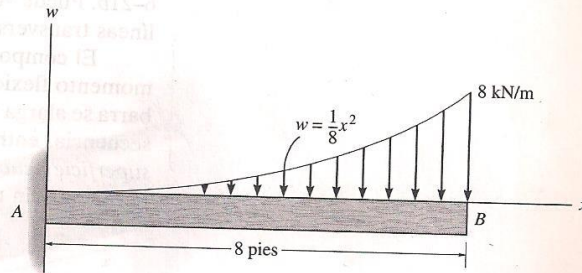
Problema 6-40

6-38 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



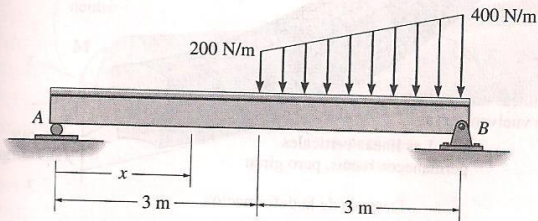
Problema 6-38

6-41 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



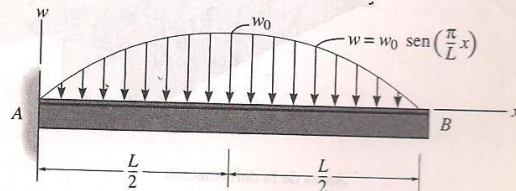
Problema 6-41

6-39 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga y determine la fuerza cortante y el momento como funciones de x.



Problema 6-39

6-42 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



Problema 6-42

6.3 DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN DE UN MIEMBRO RECTO

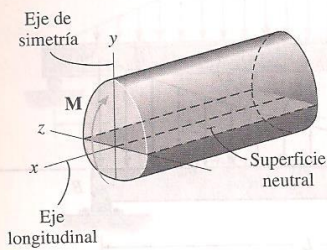


Figura 6-20

En esta sección estudiaremos las deformaciones que ocurren cuando una viga prismática recta hecha de material homogéneo está sometida a flexión. El análisis se limitará a vigas con secciones transversales simétricas respecto a un eje y el momento flexionante se encuentra aplicado respecto a un eje perpendicular a este eje de simetría, como se muestra en la figura 6-20. El comportamiento de miembros con secciones transversales asimétricas o que están hechos de varios materiales se basa en consideraciones similares, y se estudiarán separadamente en secciones posteriores de este capítulo.

Usando un material sumamente deformable como el hule, podemos ilustrar físicamente qué sucede cuando un miembro prismático recto está sometido a un momento flexionante. Consideremos, por ejemplo, la barra no deformada en la figura 6-21a que tiene una sección transversal cuadrada y está marcada con una retícula formada por líneas longitudinales y transversales. Al aplicar un momento flexionante, éste tiende a distorsionar esas líneas según el patrón mostrado en la figura 6-21b. Puede verse aquí que las líneas longitudinales se *curvan* y que las líneas transversales *permanecen rectas* pero sufren una *rotación*.

El comportamiento de cualquier barra deformable sometida a un momento flexionante es tal que el material en la porción inferior de la barra se alarga y el material en la porción superior se comprime. En consecuencia, entre esas dos regiones debe haber una superficie, llamada *superficie neutra*, en la que las fibras longitudinales del material no experimentarán un cambio de longitud, figura 6-20.

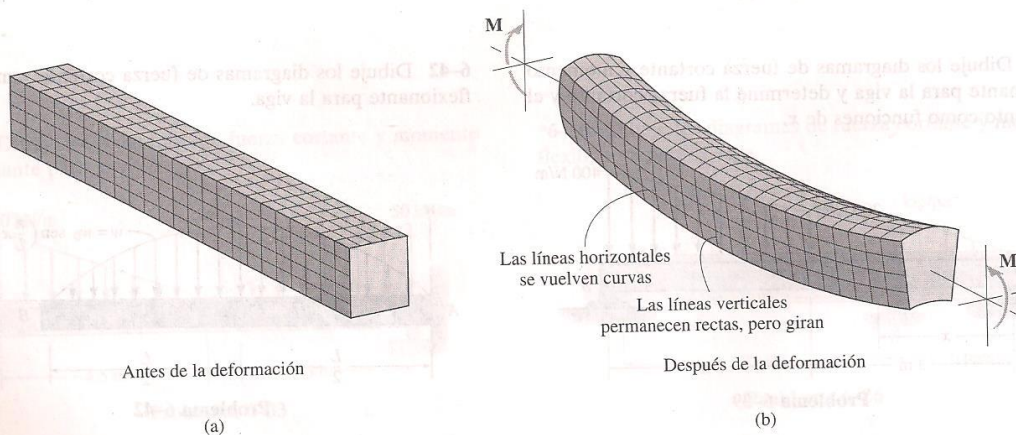


Figura 6-21

Con base en estas observaciones haremos las siguientes tres hipótesis relativas a la manera en que el esfuerzo deforma al material. La primera es que el *eje longitudinal* x , que se encuentra en la superficie neutra, figura 6-22a, no experimenta ningún *cambio de longitud*. El momento tiende a deformar la viga en forma tal que esta línea recta *se vuelve una línea curva* contenida en el plano x - y de simetría, figura 6-22b. La segunda hipótesis es que todas las *secciones transversales* de la viga *permanecen planas* y perpendiculares al eje longitudinal durante la deformación. La tercera hipótesis es que cualquier *deformación* de la *sección transversal* dentro de su propio plano será *despreciada*, figura 6-21b. En particular, el eje z , contenido en el plano de la sección transversal y respecto al cual gira la sección, se llama *eje neutro*, figura 6-22b. Su posición se determinará en la siguiente sección.

Para mostrar cómo esta distorsión deforma el material, aislaremos un segmento de la viga localizado a una distancia x a lo largo de la longitud de la viga y con un espesor Δx , figura 6-22a. Este elemento, tomado de la viga, se muestra en vista de perfil en sus posiciones no deformada y deformada de la figura 6-23. Note que cualquier segmento de línea Δx , localizado sobre la superficie neutra, no cambia de lon-

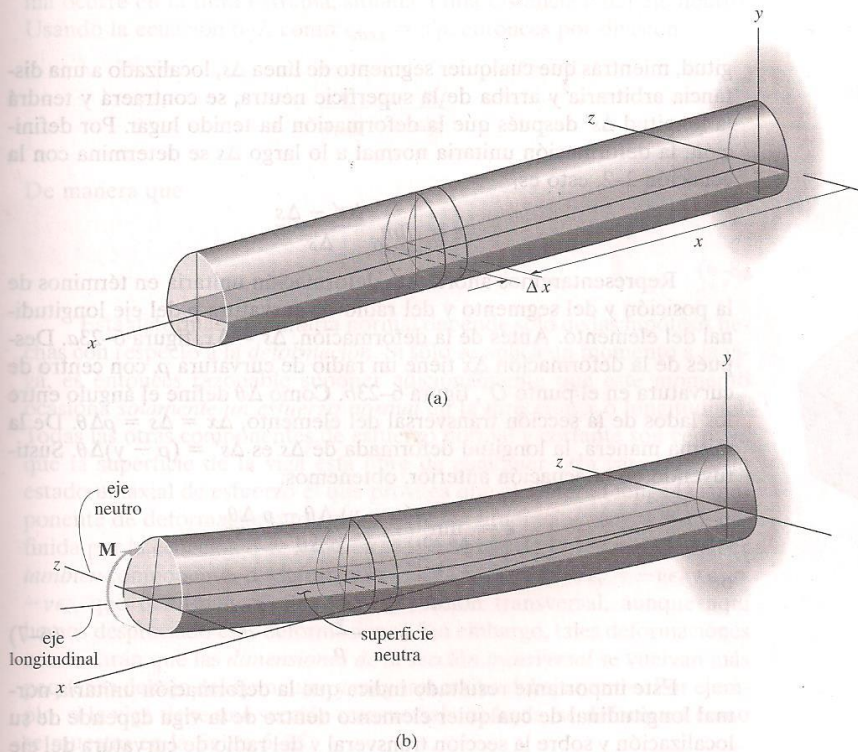


Figura 6-22

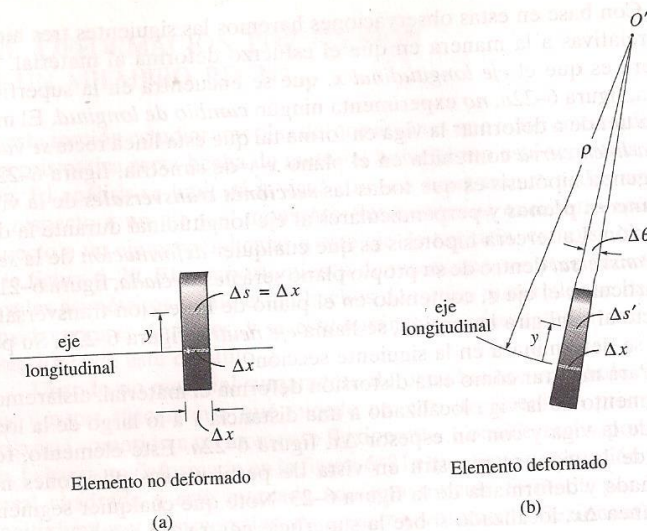


Figura 6-23

gitud, mientras que cualquier segmento de línea Δs , localizado a una distancia arbitraria y arriba de la superficie neutra, se contraerá y tendrá la longitud $\Delta s'$ después que la deformación ha tenido lugar. Por definición, la deformación unitaria normal a lo largo Δs se determina con la ecuación 2-2, esto es,

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

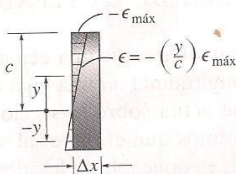
Representaremos ahora esta deformación unitaria en términos de la posición y del segmento y del radio de curvatura ρ del eje longitudinal del elemento. Antes de la deformación, $\Delta s = \Delta x$, figura 6-23a. Después de la deformación Δx tiene un radio de curvatura ρ , con centro de curvatura en el punto O' , figura 6-23b. Como $\Delta\theta$ define el ángulo entre los lados de la sección transversal del elemento, $\Delta x = \Delta s = \rho\Delta\theta$. De la misma manera, la longitud deformada de Δs es $\Delta s' = (\rho - y)\Delta\theta$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

o

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (6-7)$$

Este importante resultado indica que la deformación unitaria normal longitudinal de cualquier elemento dentro de la viga depende de su localización y sobre la sección transversal y del radio de curvatura del eje



Distribución de la deformación

Figura 6-24

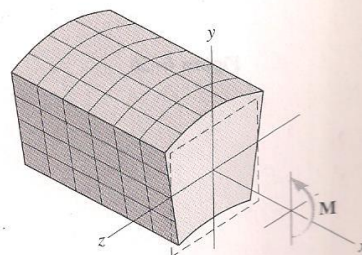
longitudinal de la viga en el punto. En otras palabras, para cualquier sección transversal específica, la **deformación unitaria normal longitudinal variará linealmente** con y desde el eje neutro. Una contracción ($-\epsilon$) ocurrirá en fibras situadas arriba del eje neutro ($+y$), mientras que se presentarán alargamientos ($+\epsilon$) en fibras localizadas debajo del eje ($-y$). Esta variación en la deformación unitaria sobre la sección transversal se muestra en la figura 6-24. Aquí la deformación unitaria máxima ocurre en la fibra extrema, situada a una distancia c del eje neutro. Usando la ecuación 6-7, como $\epsilon_{\text{máx}} = c/\rho$, entonces por división,

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{máx}}} = \frac{-y/\rho}{c/\rho}$$

De manera que

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\epsilon_{\text{máx}} \quad (6-8)$$

Esta deformación unitaria normal depende sólo de las hipótesis hechas con respecto a la *deformación*. Si sólo se aplica un momento a la viga, es entonces razonable suponer adicionalmente que este momento ocasiona *solamente un esfuerzo normal* en la dirección x o longitudinal. Todas las otras componentes de esfuerzo normal y cortante son cero, ya que la superficie de la viga está libre de cualquier otra carga. Es este estado uniaxial de esfuerzo el que provoca que el material tenga la componente de deformación unitaria normal longitudinal ϵ_x , ($\sigma_x = E\epsilon_x$), definida por la ecuación 6-8. Además, por la razón de Poisson, debe haber *también* componentes de deformación unitaria asociadas $\epsilon_y = -\nu\epsilon_x$ y $\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, que deforman el plano de la sección transversal, aunque aquí hemos despreciado esas deformaciones. Sin embargo, tales deformaciones ocasionarán que las *dimensiones de la sección transversal* se vuelvan más pequeñas debajo del eje neutro y mayores arriba del eje neutro. Por ejemplo, si la viga tiene una sección transversal cuadrada, se deformará como se muestra en la figura 6-25.


Figura 6-25

6.4 LA FÓRMULA DE LA FLEXIÓN

En esta sección desarrollaremos una ecuación que relaciona la distribución del esfuerzo longitudinal en una viga con el momento de flexión interno resultante que actúa sobre la sección transversal de la viga. Para hacer esto, supondremos que el material se comporta de manera elástica lineal, por lo que es aplicable la ley de Hooke, esto es, $\sigma = E\epsilon$. Una **variación lineal de la deformación unitaria normal**, figura 6-26a, debe ser entonces la consecuencia de una **variación lineal del esfuerzo normal**, figura 6-26b. Por tanto, igual que la variación de la deformación unitaria normal, σ variará de cero en el eje neutro del miembro a un valor máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en puntos a la distancia c máxima desde el eje neutro. Por triángulos semejantes, figura 6-26b, o usando la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, y la ecuación 6-8, podemos escribir:

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\text{máx}} \quad (6-9)$$

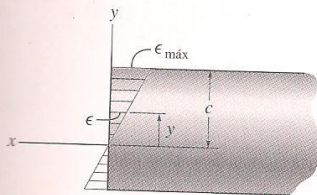
Esta ecuación representa la distribución del esfuerzo sobre la sección transversal. La convención de signos establecida aquí es importante. Para un M positivo actuando en la dirección $+z$, valores positivos de y dan valores negativos para σ , esto es, un esfuerzo de compresión ya que actúa en la dirección negativa de x . Similarmente, valores negativos de y darán valores positivos o de tensión para σ . Si se selecciona un elemento de volumen de material en un punto específico sobre la sección transversal, sólo esos esfuerzos normales de tensión o de compresión actuarán sobre él. Por ejemplo, el elemento localizado en $+y$ se muestra en la figura 6-26d.

Podemos localizar la posición del eje neutro sobre la sección transversal satisfaciendo la condición de que la **fuerza resultante** producida por la distribución del esfuerzo sobre la sección transversal debe ser igual a *cero*. Notando que la fuerza $dF = \sigma dA$ actúa sobre el elemento arbitrario dA en la figura 6-26c, requerimos que:

$$\begin{aligned} F_R = \Sigma F_x; \quad 0 &= \int_A dF = \int_A \sigma dA \\ &= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\text{máx}} dA \\ &= \frac{-\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y dA \end{aligned}$$

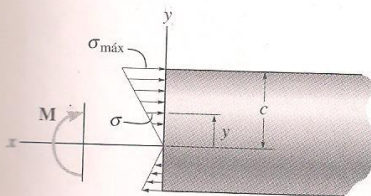
Como $\sigma_{\text{máx}}/c$ no es igual a cero, entonces:

$$\int_A y dA = 0 \quad (6-10)$$



Variación de la deformación unitaria normal (vista de perfil)

(a)

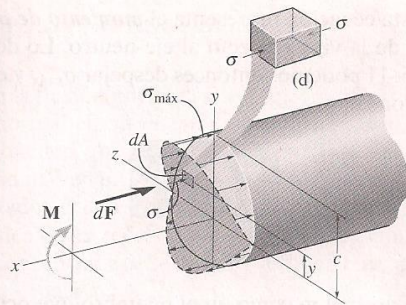


Variación del esfuerzo de flexión (vista de perfil)

(b)

Figura 6-26

Figura 6-26



Variación del esfuerzo de flexión

(c)

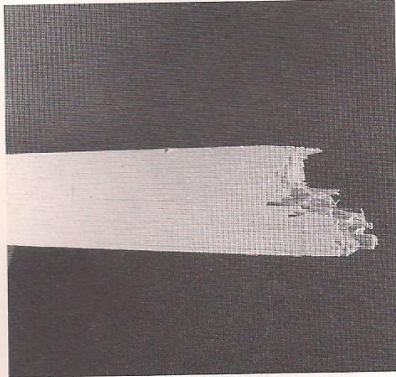
En otras palabras, el momento estático de la sección transversal del miembro respecto al eje neutro debe ser cero. Esta condición sólo puede ser satisfecha si el eje neutro es también el eje centroidal horizontal de la sección transversal.* En consecuencia, una vez determinado el centroide de la sección transversal del miembro, se conoce también la posición del eje neutro.

Podemos determinar el esfuerzo en la viga a partir del requisito de que el momento interno resultante M debe ser igual al momento producido por la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro. El momento de dF en la figura 6-26c respecto al eje neutro es $dM = y dF$. Este momento es *positivo* ya que, por la regla de la mano derecha, el pulgar está dirigido a lo largo del eje positivo z cuando los dedos se curvan según el sentido de rotación causado por dM . Como $dF = \sigma dA$, usando la ecuación 6-9 y constatando que el momento es positivo cuando y es positiva y σ es negativo, tenemos para la sección transversal total,

$$(M_x)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A y dF = \int_A y (-\sigma dA) = \int_A y \left(\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}} \right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y^2 dA \quad (6-11)$$

*Recuerde que la posición del centroide \bar{y} de la sección transversal se define por la ecuación $\bar{y} = \int y dA / \int dA$. Si $\int y dA = 0$, entonces $\bar{y} = 0$, por lo que el centroide se localiza sobre el eje de referencia (eje neutro). Vea el apéndice A.



Este espécimen de madera falló por flexión; sus fibras superiores se aplastaron y sus fibras inferiores se rompieron.

La integral en esta ecuación representa el *momento de inercia* de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro. Lo denotamos con I . De la ecuación 6-11 podemos entonces despejar $\sigma_{\text{máx}}$ y escribirla en forma general como:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \quad (6-12)$$

Aquí,

$\sigma_{\text{máx}}$ = esfuerzo normal máximo en el miembro que ocurre en el punto de la sección transversal *más alejado* del eje neutro

M = momento interno resultante, determinado con el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio y se calcula respecto al eje neutro de la sección transversal

I = momento de inercia de la sección transversal calculado respecto al eje neutro

c = distancia perpendicular del eje neutro al punto más alejado de este eje y sobre el cual actúa $\sigma_{\text{máx}}$

Como $\sigma_{\text{máx}}/c = -\sigma/y$, ecuación 6-9, el esfuerzo normal a la distancia y intermedia puede determinarse con una ecuación similar a la ecuación 6-12. Tenemos:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (6-13)$$

Advierta que el signo negativo es necesario ya que es consistente con los ejes x , y , z establecidos. Por la regla de la mano derecha, M es positivo a lo largo del eje $+z$, y es positiva hacia arriba por lo que σ debe ser negativo (compresivo) ya que actúa en la dirección x negativa, figura 6-26c.

A cualquiera de las dos ecuaciones dadas arriba se les llama *fórmula de la flexión*. Se usa para determinar el esfuerzo normal en un miembro recto con sección transversal simétrica respecto a un eje y el momento aplicado perpendicularmente a este eje. No obstante que hemos supuesto que el miembro es prismático, podemos en la mayoría de los casos de diseño ingenieril usar la fórmula de la flexión también para determinar el esfuerzo normal en miembros que tienen un *ligero ahusamiento*. Por ejemplo, con base en la teoría de la elasticidad, un miembro con una sección transversal rectangular y un ahusamiento de 15° en sus lados superior e inferior longitudinales, tendrá un esfuerzo normal máximo real que es aproximadamente 5.4% menor que el calculado usando la fórmula de la flexión.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La fórmula de la flexión puede usarse para encontrar la distribución del esfuerzo normal en un *miembro recto prismático* hecho con un material homogéneo que tiene comportamiento elástico-lineal. El principio de Saint-Venant requiere que esta fórmula se aplique en puntos localizados a una cierta distancia de cualquier soporte, de discontinuidades en la sección transversal o de puntos en que actúen cargas concentradas. Se sugiere el siguiente procedimiento para aplicar la ecuación.

Momento interno. Seccione el miembro perpendicularmente a su eje longitudinal en el punto en que debe determinarse el esfuerzo normal o de flexión y use los diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio necesarios para obtener el momento interno M en la sección. Para esto, debe conocerse el eje neutro o centroidal de la sección transversal, ya que M debe calcularse respecto a este eje. Si el esfuerzo máximo absoluto de flexión debe determinarse, dibuje entonces el diagrama de momento flexionante para determinar el momento máximo en la viga.

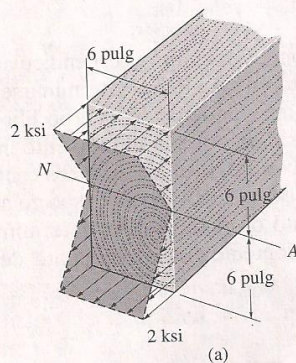
Propiedades de la sección. Calcule el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro. Los métodos usados para efectuar este cálculo se ven en el apéndice A, y en el forro interior de la cubierta se presenta una tabla con valores de I para varios perfiles comunes.

Esfuerzo normal. Especifique la distancia y , medida perpendicularmente al eje neutro, al punto donde va a determinarse el esfuerzo normal. Aplique luego la ecuación $\sigma = -My/I$ o, si va a calcularse el esfuerzo máximo de flexión, use $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. Al sustituir los valores numéricos, asegúrese de que las unidades sean consistentes.

El esfuerzo actúa en una dirección tal que la fuerza dF que se crea en el punto genera un momento respecto al eje neutro que tiene el mismo sentido que el momento interno M , figura 6-26c. De esta manera, la distribución del esfuerzo que actúa sobre toda la sección transversal puede esbozarse, o aislarse un elemento de volumen del material para representar gráficamente el esfuerzo normal que actúa en el punto.

EJEMPLO 6-14

Una viga tiene sección transversal rectangular y está sometida a la distribución de esfuerzo mostrada en la figura 6-27a. Determine el momento interno M en la sección causado por la distribución de esfuerzo (a) usando la fórmula de la flexión, (b) calculando la resultante de la distribución del esfuerzo mediante principios básicos.

**Figura 6-27****SOLUCIÓN**

Parte (a). La fórmula de la flexión es $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. De la figura 6-27a, $c = 6$ pulg y $\sigma_{\text{máx}} = 2$ ksi. El eje neutro se define como la línea NA , porque el esfuerzo es cero a lo largo de esta línea. Como la sección transversal tiene una forma rectangular, el momento de inercia de la sección respecto al NA se determina con la fórmula para un rectángulo dado en el forro interior de este texto; esto es,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6 \text{ pulg})(12 \text{ pulg})^3 = 864 \text{ pulg}^4$$

Por tanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad 2 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{M(6 \text{ pulg})}{864 \text{ pulg}^4}$$

$$M = 288 \text{ kip} \cdot \text{pulg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie}$$

Resp.

Parte (b). Demostraremos primero que la fuerza resultante de la distribución del esfuerzo es cero. Como se muestra en la figura 6-27b, el esfuerzo que actúa sobre la franja arbitraria $dA = (6 \text{ pulg}) dy$, localizada a una distancia y del eje neutro, es:

$$\sigma = \left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}} \right) (2 \text{ kip/pulg}^2)$$

La fuerza generada por este esfuerzo es $dF = \sigma dA$, y entonces, para la sección transversal entera,

$$\begin{aligned} F_R &= \int_A \sigma dA = \int_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}} \left[\left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}} \right) (2 \text{ kip/pulg}^2) \right] (6 \text{ pulg}) dy \\ &= (-1 \text{ kip/pulg}^2) y^2 \Big|_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}} = 0 \end{aligned}$$

El momento resultante de la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro (eje z) debe ser igual a M . Como la magnitud del momento dF respecto a este eje es $dM = y dF$, y dM es *siempre positiva*, figura 6-27b, entonces para la sección entera,

$$\begin{aligned} M &= \int_A y dF = \int_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}} y \left[\left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}} \right) (2 \text{ kip/pulg}^2) \right] (6 \text{ pulg}) dy \\ &= \left(\frac{2}{3} \text{ kip/pulg}^2 \right) y^3 \Big|_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}} \\ &= 288 \text{ kip} \cdot \text{pulg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie} \end{aligned}$$

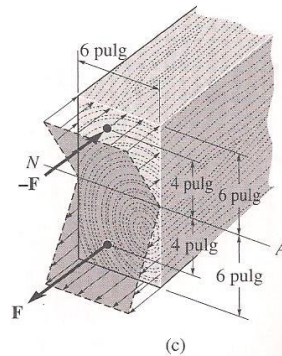
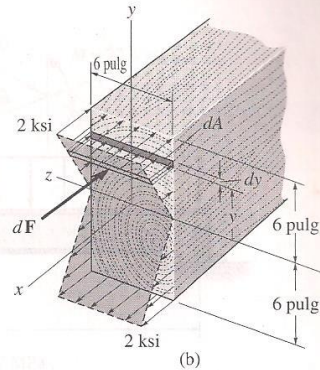
Resp.

El resultado anterior puede también determinarse sin integración. La fuerza resultante para cada una de las dos distribuciones triangulares de esfuerzo en la figura 6-27c es gráficamente equivalente al volumen contenido dentro de cada distribución de esfuerzo. Así entonces, cada volumen es:

$$F = \frac{1}{2} (6 \text{ pulg}) (2 \text{ kip/pulg}^2) (6 \text{ pulg}) = 36 \text{ kip}$$

Esas fuerzas, que forman un par, actúan en el mismo sentido que los esfuerzos dentro de cada distribución, figura 6-27c. Además, actúan pasando por el centroide de cada volumen, esto es, $\frac{1}{3}(6 \text{ pulg}) = 2 \text{ pulg}$ desde las partes superior e inferior de la viga. Por tanto, la distancia entre ellas es de 8 pulg, tal como se muestra. El momento del par es entonces:

$$M = 36 \text{ kip} (8 \text{ pulg}) = 288 \text{ kip} \cdot \text{pulg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$



EJEMPLO 6-15

La viga simplemente apoyada en la figura 6-28a tiene la sección transversal mostrada en la figura 6-28b. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga y dibuje la distribución del esfuerzo en la sección transversal en esta localidad.

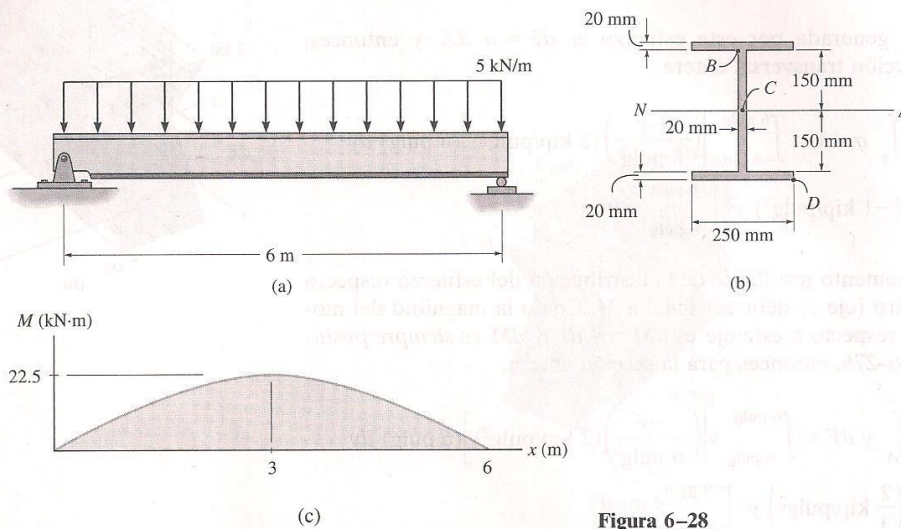


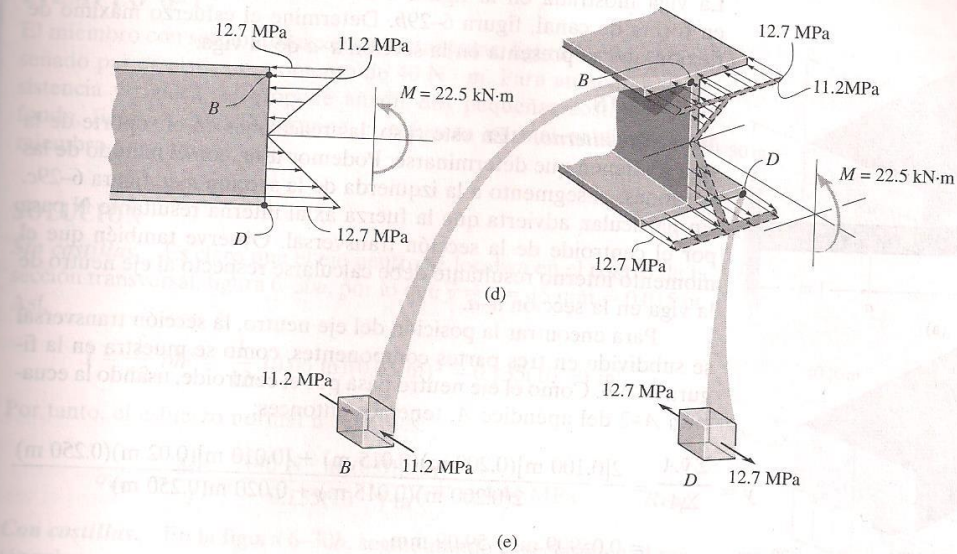
Figura 6-28

SOLUCIÓN

Momento interno máximo. El momento interno máximo en la viga, $M = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, ocurre en el centro del claro como se muestra en el diagrama de momento flexionante, figura 6-28c. Vea el ejemplo 6-3.

Propiedades de la sección. Por razones de simetría, el centroide C y el eje neutro pasan por la mitad de la altura de la viga, figura 6-28b. La sección transversal se subdivide en las tres partes mostradas y el momento de inercia de cada parte se calcula respecto al eje neutro usando el teorema de los ejes paralelos. (Vea la ecuación A-5 del apéndice A.) Trabajando en metros, tenemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\
 &= 2 \left[\frac{1}{12} (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.160 \text{ m})^2 \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{12} (0.020 \text{ m})(0.300 \text{ m})^3 \right] \\
 &= 301.3(10^{-6}) \text{ m}^4
 \end{aligned}$$



Esfuerzo de flexión. Aplicando la fórmula de la flexión, con $c = 170 \text{ mm}$, el esfuerzo máximo absoluto de flexión es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

En la figura 6-28d se muestran vistas bi y tridimensionales de la distribución del esfuerzo. Note cómo el esfuerzo en cada punto sobre la sección transversal desarrolla una fuerza que contribuye con un momento dM respecto al eje neutro que tiene el mismo sentido que M . Específicamente, en el punto B , $y_B = 150 \text{ mm}$, por lo que:

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 11.2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal que actúa sobre elementos de material localizados en los puntos B y D se muestra en la figura 6-28e.

EJEMPLO 6-16

La viga mostrada en la figura 6-29a tiene una sección transversal en forma de canal, figura 6-29b. Determine el esfuerzo máximo de flexión que se presenta en la sección a-a de la viga.

SOLUCIÓN

Momento interno. En este caso, las reacciones en el soporte de la viga no tienen que determinarse. Podemos usar, con el método de las secciones, el segmento a la izquierda de la sección a-a, figura 6-29c. En particular, advierta que la fuerza axial interna resultante N pasa por el centroide de la sección transversal. Observe también que el momento interno resultante debe calcularse respecto al eje neutro de la viga en la sección a-a.

Para encontrar la posición del eje neutro, la sección transversal se subdivide en tres partes componentes, como se muestra en la figura 6-29b. Como el eje neutro pasa por el centroide, usando la ecuación A-2 del apéndice A, tenemos entonces:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2[0.100 \text{ m}](0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + [0.010 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.250 \text{ m})}{2(0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + 0.020 \text{ m}(0.250 \text{ m})}$$

$$= 0.05909 \text{ m} = 59.09 \text{ mm}$$

Esta posición se muestra en la figura 6-29c.

Aplicando la ecuación de equilibrio por momentos respecto al eje neutro, tenemos:

$$\zeta^+ \sum M_{NA} = 0; \quad 2.4 \text{ kN}(2 \text{ m}) + 1.0 \text{ kN}(0.05909 \text{ m}) - M = 0$$

$$M = 4.859 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Propiedades de la sección. El momento de inercia respecto al eje neutro se determina usando el teorema de los ejes paralelos, aplicado a cada una de las tres partes componentes de la sección transversal. Trabajando en metros, tenemos:

$$I = \left[\frac{1}{12} (0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.05909 \text{ m} - 0.010 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ 2 \left[\frac{1}{12} (0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})^3 + (0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})(0.100 \text{ m} - 0.05909 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 42.26(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Esfuerzo máximo de flexión. El esfuerzo máximo de flexión ocurre en los puntos más alejados del eje neutro. En este caso, el punto más alejado está en el fondo de la viga; $c = 0.200 \text{ m} - \bar{y} = 0.1409 \text{ m}$. Entonces,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4.859 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.1409 \text{ m})}{42.26(10^{-6}) \text{ m}^4} = 16.2 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Muestre que en la parte superior de la viga el esfuerzo de flexión es $\sigma = 6.79 \text{ MPa}$. Note que además de este efecto de flexión, la fuerza normal de $N = 1 \text{ kN}$ y la fuerza cortante $V = 2.4 \text{ kN}$ contribuirán también con esfuerzos adicionales sobre la sección transversal. La superposición de todos esos efectos se verá en un capítulo posterior.

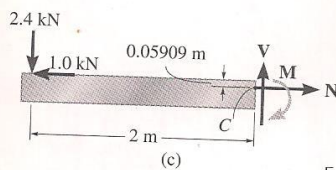
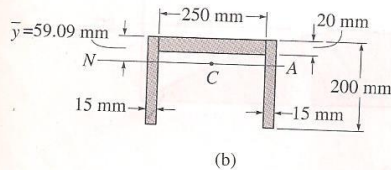
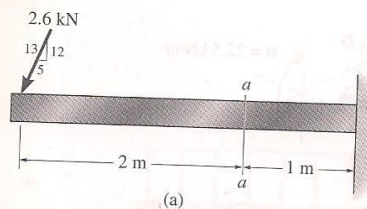
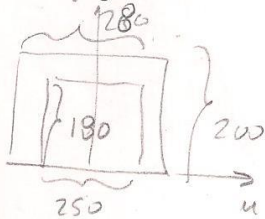


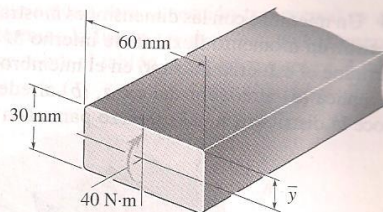
Figura 6-29



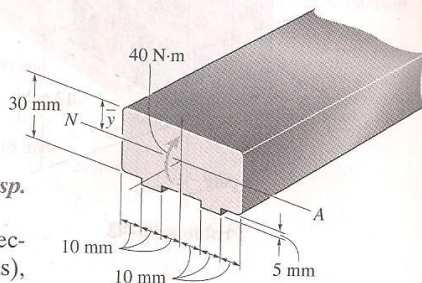
$$V_c = \frac{280 \times 200 \times 100 - 250 \times 180 \times 90}{280 \times 200 - 250 \times 180}$$

EJEMPLO 6-17

El miembro con sección transversal rectangular, figura 6-30a, está diseñado para resistir un momento de $40 \text{ N} \cdot \text{m}$. Para aumentar su resistencia y rigidez, se propone añadir dos pequeñas costillas en su fondo, figura 6-30b. Determine el esfuerzo normal máximo en el miembro para ambos casos.



(a)



(b)

Figura 6-30
SOLUCIÓN

Sin costillas. Es claro que el eje neutro se localiza en el centro de la sección transversal, figura 6-30a, por lo que $\bar{y} = c = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$. Así,

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (0.06 \text{ m})(0.03 \text{ m})^3 = 0.135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Por tanto, el esfuerzo normal máximo es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N} \cdot \text{m})(0.015 \text{ m})}{0.135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.44 \text{ MPa}$$

Resp.

Con costillas. En la figura 6-30b, segmentando la sección en el rectángulo grande principal y en los dos rectángulos inferiores (costillas), la posición del centroide y del eje neutro se determinan como sigue:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$= \frac{[0.015 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2[0.0325 \text{ m}](0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}{(0.03 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2(0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}$$

$$= 0.01592 \text{ m}$$

Este valor no representa a c . Más bien,

$$c = 0.035 \text{ m} - 0.01592 \text{ m} = 0.01908 \text{ m}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia

$$I = \left[\frac{1}{12} (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.01592 \text{ m} - 0.015 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ 2 \left[\frac{1}{12} (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})^3 + (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})(0.0325 \text{ m} - 0.01592 \text{ m})^2 \right]$$

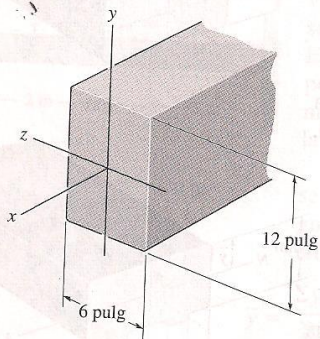
$$= 0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4$$

respecto al eje neutro es:

$$\frac{40 \text{ N} \cdot \text{m} \times 0.01908 \text{ m}}{0.1642 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 4,643 \text{ MPa} \quad (\text{MAYOR ESFUERZO QUE SIN LAS COSTILLAS})$$

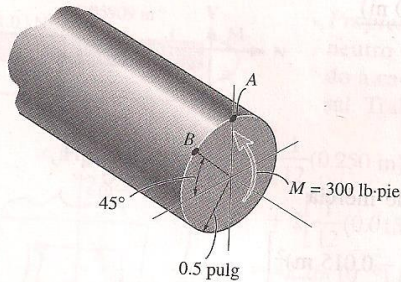
PROBLEMAS

6-43 Un miembro con las dimensiones mostradas se usa para resistir un momento flexionante interno $M = 2 \text{ kip} \cdot \text{pie}$. Determine el esfuerzo máximo en el miembro si el momento se aplica (a) alrededor del eje z , (b) alrededor del eje y . Esboce la distribución del esfuerzo para cada caso.



Problema 6-43

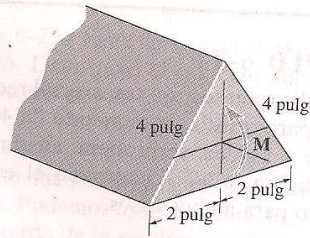
*6-44 La barra de acero con diámetro de 1 pulg está sometida a un momento interno $M = 300 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Determine el esfuerzo generado en los puntos A y B . Esboce también una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Problema 6-44

6-45 Un miembro tiene la sección transversal triangular mostrada. Determine el máximo momento interno M que puede aplicarse a la sección sin exceder los esfuerzos permisibles de tensión y de compresión de $(\sigma_{perm})_t = 22 \text{ ksi}$ y $(\sigma_{perm})_c = 15 \text{ ksi}$, respectivamente.

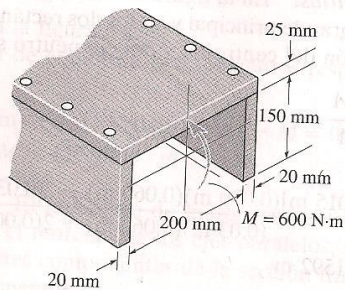
6-46 Un miembro tiene la sección transversal triangular mostrada. Si se aplica un momento $M = 800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a la sección, determine los esfuerzos máximos de tensión y de compresión por flexión en el miembro. También, esboce una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Problemas 6-45/6-46

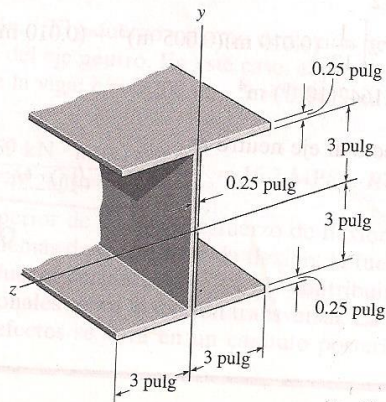
6-47 La viga está hecha de tres tablones unidos entre sí por medio de clavos. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine el esfuerzo de flexión máximo en la viga. Esboce una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.

*6-48 La viga está hecha de tres tablones unidos entre sí por medio de clavos. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la fuerza resultante que el esfuerzo de flexión ejerce sobre el tablón superior.



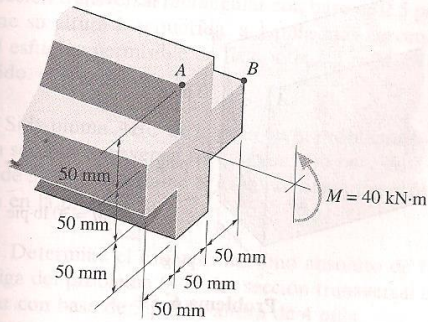
Problemas 6-47/6-48

6-49 Una viga tiene la sección transversal mostrada. Si está hecha de acero con un esfuerzo permisible $\sigma_{perm} = 24 \text{ ksi}$, determine el máximo momento interno que la viga puede resistir si el momento se aplica (a) alrededor del eje z , (b) alrededor del eje y .



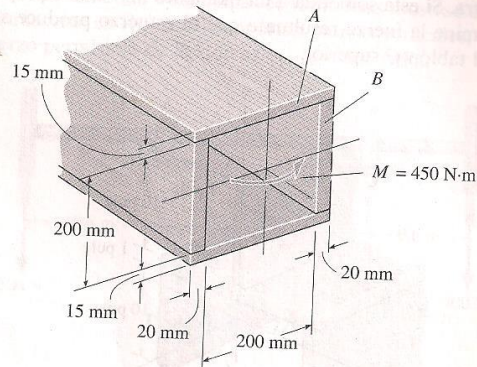
Problema 6-49

6-50 La viga está sometida a un momento $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Determine el esfuerzo de flexión que actúa en los puntos A y B . Esboce los resultados sobre un elemento de volumen presente en cada uno de esos puntos.



Problema 6-50

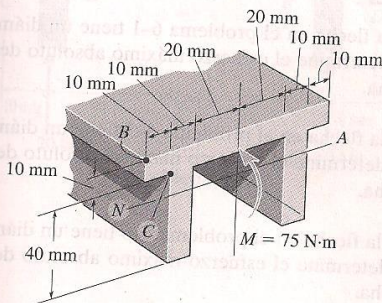
6-53 Una viga está construida con cuatro tabloncillos de madera unidos entre sí por pegamento, como se muestra. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 450 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la fuerza resultante que el esfuerzo de flexión produce sobre el tabloncillo A superior y sobre el tabloncillo B lateral.



Problema 6-53

6-51 La parte de máquina de aluminio está sometida a un momento $M = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine el esfuerzo de flexión generado en los puntos B y C sobre la sección transversal. Esboce los resultados sobre un elemento de volumen localizado en cada uno de esos puntos.

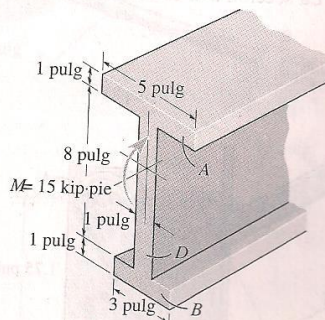
*6-52 La parte de máquina de aluminio está sometida a un momento $M = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine los esfuerzos máximos de tensión y de compresión por flexión en la parte.



Problemas 6-51/6-52

6-54 La viga está sometida a un momento de $15 \text{ kip} \cdot \text{pie}$. Determine la fuerza resultante que el esfuerzo de flexión produce sobre el patín A superior y sobre el patín B inferior. También, calcule el esfuerzo máximo de flexión desarrollado en la viga.

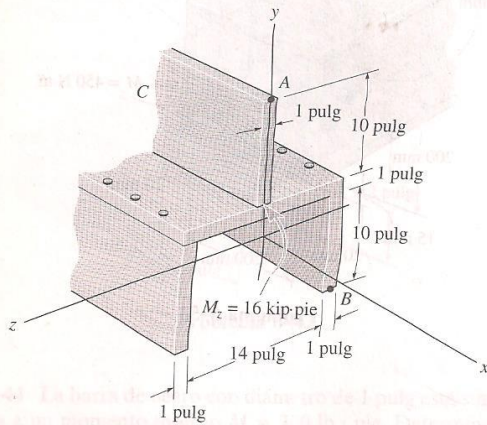
6-55 La viga está sometida a un momento de $15 \text{ kip} \cdot \text{pie}$. Determine el porcentaje de este momento que es resistido por el alma D de la viga.



Problemas 6-54/6-55

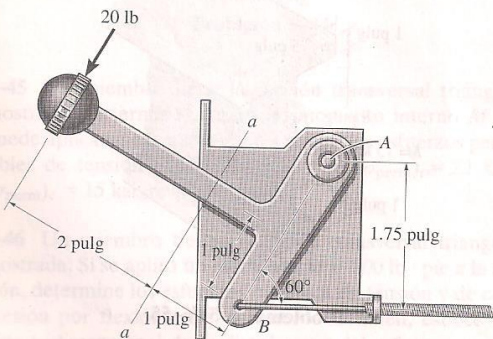
***6-56** La viga está construida con cuatro tabloncillos como se muestra. Si está sometida a un momento $M_z = 16 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, determine el esfuerzo en los puntos A y B . Esboce una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo.

6-57 La viga está construida con cuatro tabloncillos como se muestra. Si está sometida a un momento $M_z = 16 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, determine la fuerza resultante que el esfuerzo produce sobre el tabloncillo C superior.



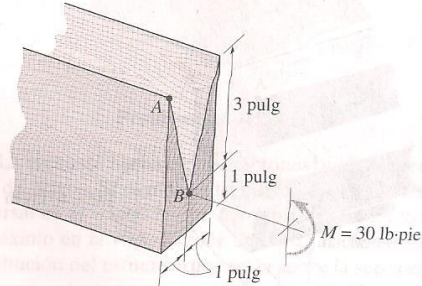
Problemas 6-56/6-57

6-58 La palanca de control se usa en una segadora de césped. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la sección $a-a$ de la palanca si se aplica una fuerza de 20 lb a la manija. La palanca está soportada por un pasador en A y por un alambre en B . La sección $a-a$ es cuadrada de 0.25 pulg por 0.25 pulg.



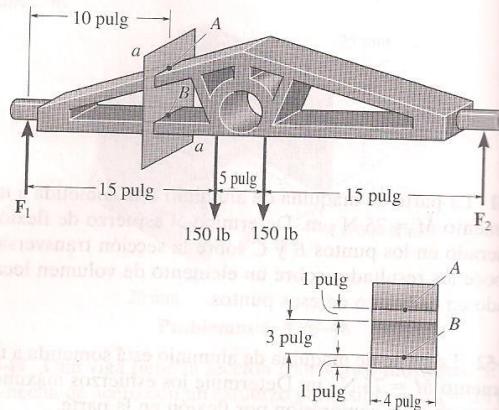
Problema 6-58

6-59 La viga está sometida a un momento $M = 30 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Determine el esfuerzo de flexión que actúa en los puntos A y B . También esboce una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal entera.



Problema 6-59

***6-60** La pieza de fundición ahusada soporta la carga mostrada. Determine el esfuerzo de flexión en los puntos A y B . La sección transversal en la sección $a-a$ se da en la figura.



Problema 6-60

6-61 Si la flecha en el problema 6-1 tiene un diámetro de 100 mm, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha.

6-62 Si la flecha en el problema 6-3 tiene un diámetro de 1.5 pulg, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha.

6-63 Si la flecha en el problema 6-6 tiene un diámetro de 50 mm, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha.

***6-64** Si el tubo en el problema 6-8 tiene un diámetro exterior de 30 mm y un espesor de 10 mm, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha.

6-65 La viga *ACB* en el problema 6-9 tiene una sección transversal cuadrada de 6×6 pulg. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga.

6-66 La pluma *ABC* de la grúa en el problema 6-10 tiene una sección transversal rectangular con base de 2.5 pulg; determine su altura *h* requerida, a $\frac{1}{4}$ pulg más cercano, para que el esfuerzo permisible de flexión $\sigma_{perm} = 24$ ksi no sea excedido.

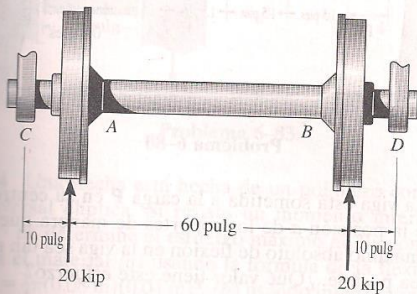
6-67 Si la pluma *ABC* de la grúa en el problema 6-10 tiene una sección transversal rectangular con base de 2 pulg y altura de 3 pulg, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la pluma.

*6-68 Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga del problema 6-24. La sección transversal es rectangular con base de 3 pulg y altura de 4 pulg.

6-69 Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga del problema 6-25. Cada segmento tiene una sección transversal rectangular con base de 4 pulg y altura de 8 pulg.

6-70 Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en el pasador de 20 mm de diámetro en el problema 6-35.

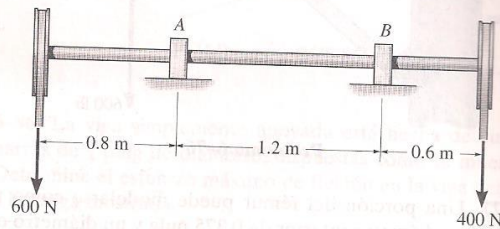
6-71 El eje del vagón de ferrocarril está sometido a cargas de 20 kip en sus ruedas. Si el eje está soportado por dos chumaceras en *C* y *D*, determine el esfuerzo máximo de flexión generado en el centro del eje, donde el diámetro es de 5.5 pulg.



Problema 6-71

*6-72 Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha de 30 mm de diámetro sometida a las fuerzas concentradas indicadas. Las chumaceras en *A* y *B* soportan sólo fuerzas verticales.

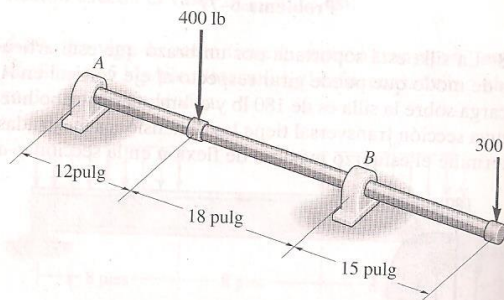
6-73 Determine el diámetro permisible más pequeño para la flecha sometida a las cargas concentradas mostradas. Las chumaceras en *A* y *B* sólo soportan fuerzas verticales; el esfuerzo permisible de flexión es $\sigma_{perm} = 160$ MPa.



Problemas 6-72/6-73

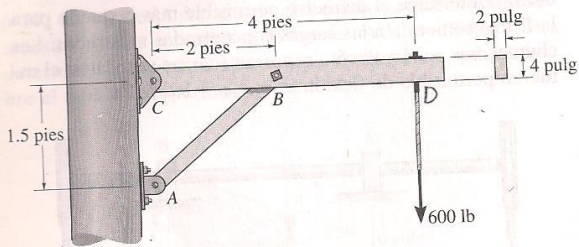
6-74 Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha de 1.5 pulg de diámetro sometida a las fuerzas concentradas indicadas. Las chumaceras en *A* y *B* soportan sólo fuerzas verticales.

6-75 Determine el diámetro permisible más pequeño para la flecha sometida a las fuerzas concentradas indicadas. Las chumaceras en *A* y en *B* soportan sólo fuerzas verticales y el esfuerzo permisible de flexión es $\sigma_{perm} = 22$ ksi.



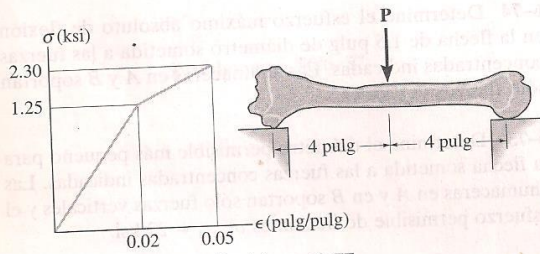
Problemas 6-74/6-75

*6-76 El brazo CD del poste de servicio soporta un cable del que pende un peso de 600 lb. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en el brazo si se supone que A , B y C están articulados.



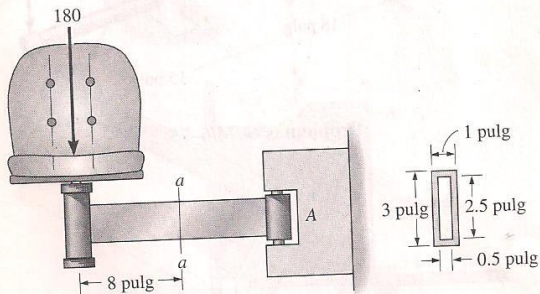
Problema 6-76

6-77 Una porción del fémur puede modelarse como un tubo con diámetro interior de 0.375 pulg y un diámetro exterior de 1.25 pulg. Determine la máxima fuerza P elástica estática que puede aplicársele en su centro sin que se produzca falla. El diagrama σ - ϵ para el material del hueso se muestra en la figura y es el mismo en tensión y en compresión.



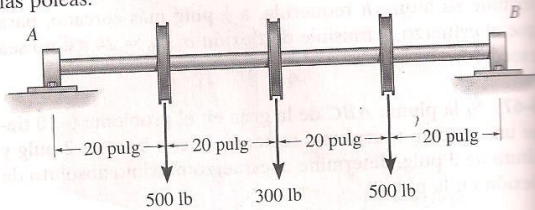
Problema 6-77

6-78 La silla está soportada por un brazo que está articulado de modo que puede girar respecto al eje vertical en A . La carga sobre la silla es de 180 lb y el brazo es un tubo hueco cuya sección transversal tiene las dimensiones mostradas. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la sección $a-a$.



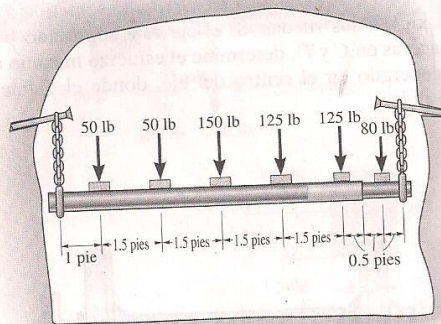
Problema 6-78

6-79 La flecha de acero tiene una sección transversal circular con diámetro de 2 pulg. Está soportada sobre chumaceras lisas A y B , que ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la flecha cuando está sometida a las cargas mostradas de las poleas.



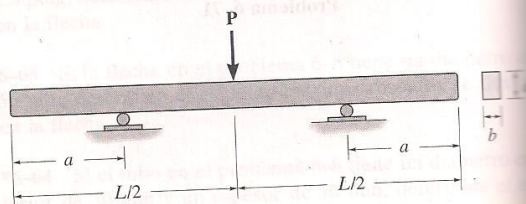
Problema 6-79

*6-80 Los soportes extremos de un andamio para perforadores usado en una mina de carbón consisten en un tubo con diámetro exterior de 4 pulg que enchufa con un tubo de diámetro exterior de 3 pulg de diámetro exterior. Cada tubo tiene un espesor de 0.25 pulg. Con las reacciones extremas de los tableros soportados dadas, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en cada tubo. Desprecie el tamaño de los tableros en los cálculos.



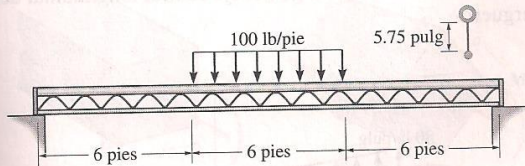
Problema 6-80

6-81 La viga está sometida a la carga P en su centro. Determine la posición a de los soportes de manera que el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga sea tan grande como sea posible. ¿Qué valor tiene este esfuerzo?



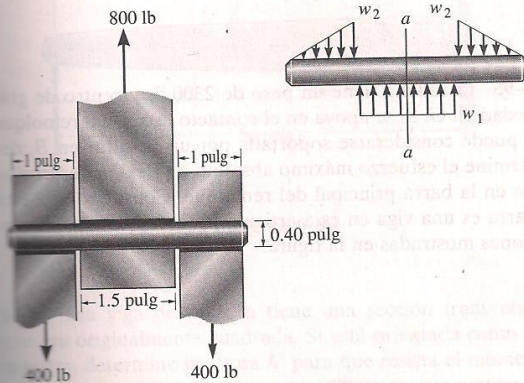
Problema 6-81

6-82 La armadura simplemente apoyada está sometida a la carga central distribuida. Desprecie el efecto de la celosía diagonal y determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la armadura. El miembro superior es un tubo con diámetro exterior de 1 pulg y espesor de $\frac{3}{16}$ pulg; el miembro inferior es una barra sólida con diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg.



Problema 6-82

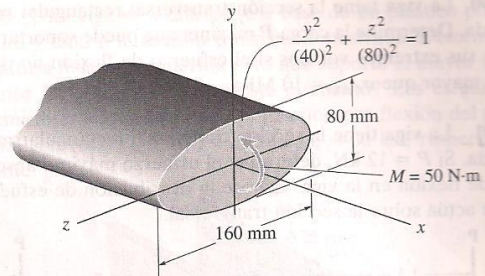
6-83 El pasador se usa para conectar los tres eslabones entre sí. Debido al desgaste, la carga se distribuye sobre la parte superior e inferior del pasador como se muestra en el diagrama de cuerpo libre. Si el diámetro del pasador es de 0.40 pulg, determine el esfuerzo máximo de flexión sobre la sección transversal $a-a$ central. Para obtener la solución es necesario primero determinar las intensidades de las cargas w_1 y w_2 .



Problema 6-83

6-84 Una flecha está hecha de un polímero con sección transversal elíptica. Si resiste un momento interno $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine el esfuerzo máximo de flexión generado en el material (a) usando la fórmula de la flexión, donde $I_z = \frac{1}{4}\pi(0.08 \text{ m})(0.04 \text{ m})^3$, (b) usando integración. Esboce una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.

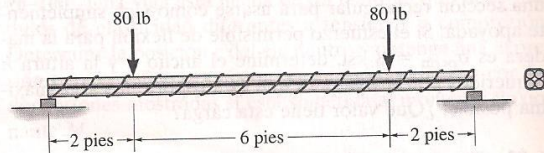
6-85 Resuelva el problema 6-84 considerando que el momento $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ está aplicado respecto al eje y y no respecto al eje x . Aquí, $I_y = \frac{1}{4}\pi(0.04 \text{ m})(0.08 \text{ m})^3$.



Problemas 6-84/6-85

6-86 La viga simplemente apoyada está hecha de cuatro barras de $\frac{3}{4}$ pulg de diámetro, dispuestas como se muestra. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la viga debido a la carga mostrada.

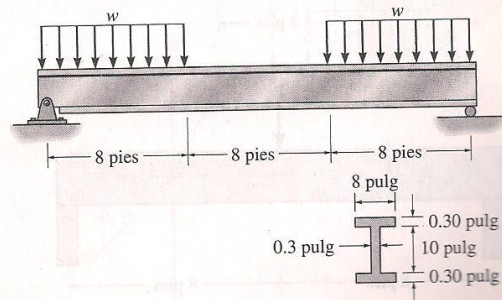
6-87 Resuelva el problema 6-86 si el haz se gira 45° y se fija en los soportes.



Problemas 6-86/6-87

*6-88 La viga de acero tiene la sección transversal mostrada. Determine la intensidad máxima de la carga w distribuida que puede soportar la viga sin que el esfuerzo de flexión exceda el valor $\sigma_{\text{máx}} = 22 \text{ ksi}$.

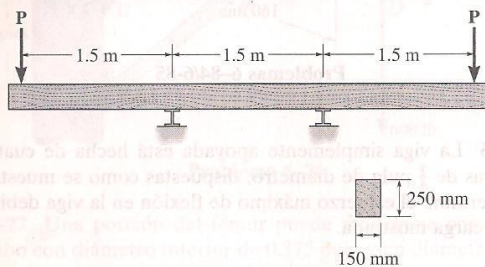
6-89 La viga de acero tiene la sección transversal mostrada. Si $w = 5 \text{ kip/pie}$, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga.



Problemas 6-88/6-89

6-90 La viga tiene la sección transversal rectangular mostrada. Determine la carga P máxima que puede soportar sobre sus extremos volados si el esfuerzo de flexión no debe ser mayor que $\sigma_{\text{máx}} = 10 \text{ MPa}$.

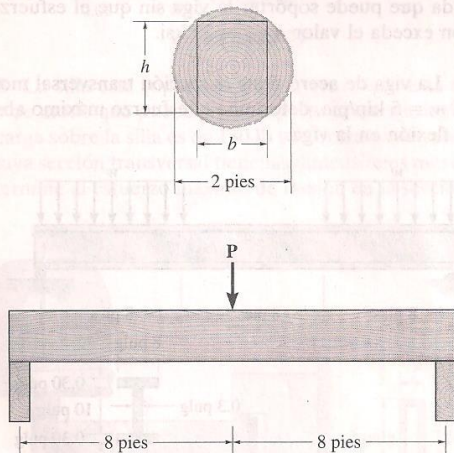
6-91 La viga tiene la sección transversal rectangular mostrada. Si $P = 12 \text{ kN}$, determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga. Esboce la distribución de esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Problemas 6-90/6-91

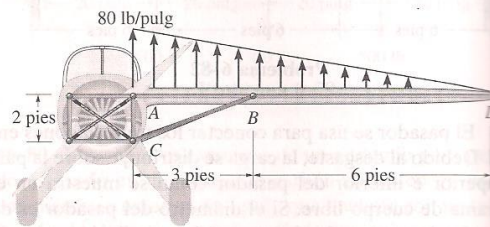
***6-92** De un tronco de dos pies de diámetro va a cortarse una sección rectangular para usarse como viga simplemente apoyada. Si el esfuerzo permisible de flexión para la madera es $\sigma_{\text{perm}} = 8 \text{ ksi}$, determine el ancho b y la altura h requeridos por la viga para que ésta soporte la carga máxima posible. ¿Qué valor tiene esta carga?

6-93 De un tronco de 2 pies de diámetro va a cortarse una sección rectangular para usarse como viga simplemente apoyada. Si el esfuerzo permisible de flexión para la madera es $\sigma_{\text{perm}} = 8 \text{ ksi}$, determine la máxima carga P que podrá soportar si el ancho de la viga es $b = 8 \text{ pulg}$.



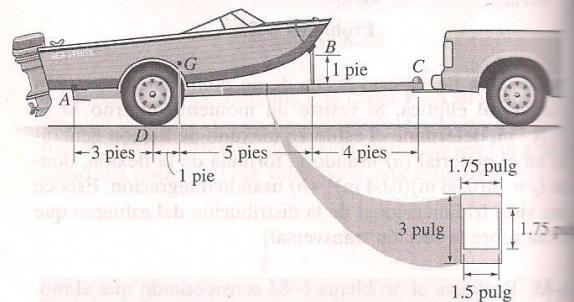
Problemas 6-92/6-93

6-94 El larguero ABD del ala de un avión ligero está hecho de aluminio 2014-T6 y tiene una sección transversal de $1.27 \text{ pulg} \times 3 \text{ pulg}$ (peralte) y un momento de inercia respecto a su eje neutro de 2.68 pulg^4 . Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en el larguero para la carga mostrada. Suponga que A , B y C están articuladas. La conexión está hecha a lo largo del eje central longitudinal del larguero.



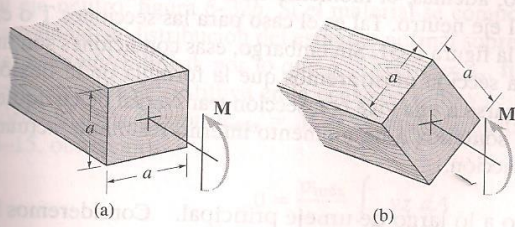
Problema 6-94

6-95 La lancha tiene un peso de 2300 lb y centro de gravedad en G . Si se apoya en el contacto liso A del remolque y puede considerarse soportada por un pasador en B , determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión desarrollado en la barra principal del remolque. Considere que esta barra es una viga en caja articulada en C y con las dimensiones mostradas en la figura.



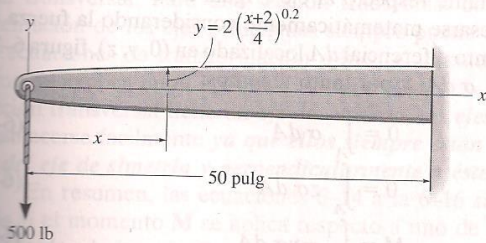
Problema 6-95

*6-96 Una viga de madera tiene sección transversal cuadrada como se muestra en la figura. Determine qué orientación de la viga da la mayor resistencia para soportar el momento M . ¿Cuál es la diferencia en el esfuerzo máximo resultante en ambos casos?



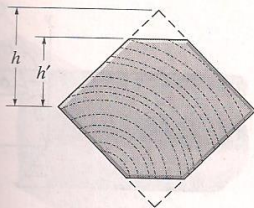
Problema 6-96

6-97 La viga en voladizo tiene un espesor de 4 pulg y un peralte variable que puede describirse por la función $y = 2[(x + 2)/4]^{0.2}$, donde x está en pulgadas. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la viga en su centro.



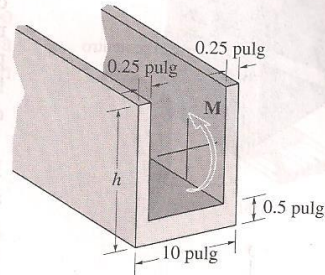
Problema 6-97

6-98 Una viga de madera tiene una sección transversal que era originalmente cuadrada. Si está orientada como se muestra, determine la altura h' para que resista el momento máximo posible. ¿Qué tanto por ciento es este momento mayor que el resistido por la viga sin sus extremos aplanados?



Problema 6-98

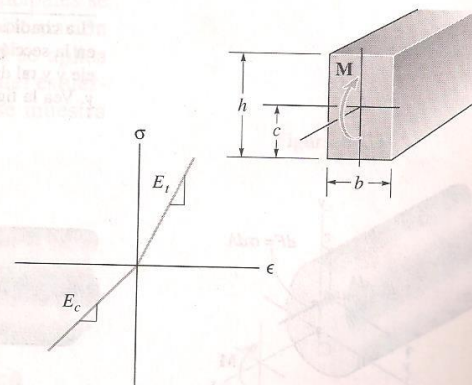
6-99 Una viga va a fabricarse a base de un plástico polietileno y tendrá la sección transversal mostrada. Determine su altura máxima requerida para que soporte el mayor momento M . ¿Qué valor tiene este momento? Los esfuerzos permisibles de tensión y de compresión por flexión del material son $(\sigma_{perm})_t = 10$ ksi y $(\sigma_{perm})_c = 30$ ksi, respectivamente.



Problema 6-99

*6-100 Una viga está hecha de un material que tiene módulos de elasticidad diferentes a tensión y a compresión. Determine la posición c del eje neutro y obtenga una expresión para el esfuerzo máximo de tensión en la viga con las dimensiones mostradas si está sometida al momento flexionante M .

6-101 La viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida a un momento flexionante M . Si el material de que está hecha tiene módulos de elasticidad diferentes a tensión y a compresión como se muestra, determine la posición c del eje neutro y el esfuerzo máximo de compresión en la viga.



Problemas 6-100/6-101

6.5 FLEXIÓN ASIMÉTRICA

Cuando desarrollamos la fórmula de la flexión, impusimos la condición de que la sección transversal fuese *simétrica* respecto a un eje perpendicular al eje neutro; además, el momento interno resultante **M** debía actuar a lo largo del eje neutro. Tal es el caso para las secciones T o en canal mostradas en la figura 6-31. Sin embargo, esas condiciones son innecesarias y en esta sección mostraremos que la fórmula de la flexión puede también aplicarse a una viga con sección transversal de cualquier forma o a una viga sometida a un momento interno resultante actuando en cualquier dirección.

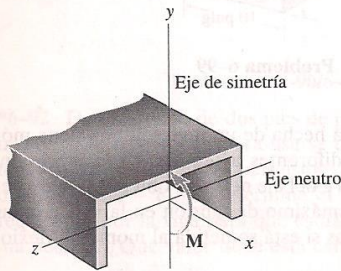
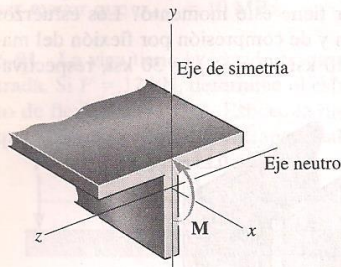


Figura 6-31

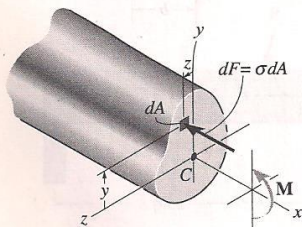
Momento aplicado a lo largo de un eje principal. Consideremos la sección transversal de la viga con la forma asimétrica mostrada en la figura 6-32a. Tal como lo hicimos en la sección 6.4, establecemos un sistema coordenado derecho *x, y, z* con su origen localizado en el centroide *C* de la sección transversal y el momento interno resultante **M** actuando a lo largo del eje *+z*. Requerimos que la distribución del esfuerzo que actúa sobre toda la sección transversal tenga una fuerza resultante cero, un momento interno resultante respecto al eje *y* igual a cero y un momento interno resultante respecto al eje *z* igual a **M**.^{*} Estas tres condiciones pueden expresarse matemáticamente considerando la fuerza que actúa sobre el elemento diferencial *dA* localizado en (*0, y, z*), figura 6-32a. Esta fuerza es $dF = \sigma dA$, y por tanto tenemos:

$$F_R = \Sigma F_x; \quad 0 = \int_A \sigma dA \quad (6-14)$$

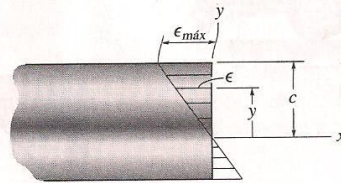
$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad 0 = \int_A z \sigma dA \quad (6-15)$$

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A -y \sigma dA \quad (6-16)$$

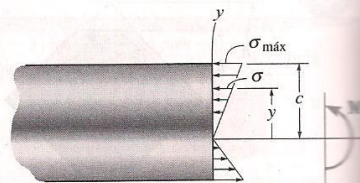
^{*}La condición de que los momentos respecto al eje *y* sean iguales a cero no se consideró en la sección 6.4, ya que la distribución del esfuerzo de flexión era simétrica respecto al eje *y* y tal distribución del esfuerzo da automáticamente un momento cero respecto al eje *y*. Vea la figura 6-26c.



(a)
Figura 6-32



(b)
Distribución de la deformación unitaria normal (vista de perfil)



(c)
Distribución del esfuerzo de flexión (vista de perfil)

Como se mostró en la sección 6.4, la ecuación 6-14 se satisface ya que el eje z pasa por el *centroide* de la sección transversal. Además, como el eje z representa el *eje neutro* de la sección transversal, la deformación unitaria normal variará linealmente de cero en el eje neutro a un máximo en un punto con la máxima coordenada y , $y = c$, respecto al eje neutro, figura 6-32*b*. Si el material se comporta de manera elástico-lineal, la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal es *también* lineal, por lo que $\sigma = -(y/c)\sigma_{\text{máx}}$, figura 6-32*c*. Cuando esta ecuación se sustituye en la ecuación 6-16 y se integra, se llega a la fórmula de la flexión $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. Cuando se sustituye en la ecuación 6-15, obtenemos:

$$0 = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A yz \, dA$$

que requiere que:

$$\int_A yz \, dA = 0$$

Esta integral se llama *producto de inercia* de la sección transversal. Como se indica en el apéndice A, será ciertamente igual a cero si los ejes y y z se escogen como los *ejes de inercia principales* de la sección transversal. Para una sección transversal de forma arbitraria, la orientación de los ejes principales siempre puede determinarse usando las ecuaciones de transformación o bien el círculo de inercia de Mohr como se explica en el apéndice, sección A-4 y A-5. Sin embargo, si la sección transversal tiene un eje de simetría, los *ejes principales* pueden establecerse fácilmente *ya que ellos siempre están orientados a lo largo del eje de simetría y perpendicularmente a éste*.

En resumen, las ecuaciones 6-14 a la 6-16 *siempre* serán satisfechas si el momento M se aplica respecto a uno de los ejes centroidales principales de inercia. Por ejemplo, considere los miembros mostrados en la figura 6-33. En cada uno de esos casos, y y z definen los ejes principales de inercia de la sección transversal cuyo origen se localiza en el centroide del área. En las figuras 6-33*a* y 6-33*b*, los ejes principales se localizan por simetría y en las figuras 6-33*c* y 6-33*d* su orientación se determina usando los métodos del apéndice A. Como M se aplica respecto a uno de los ejes principales (eje z), la distribución del esfuerzo se determina con la fórmula de la flexión, $\sigma = My/I_z$, y se muestra para cada caso.

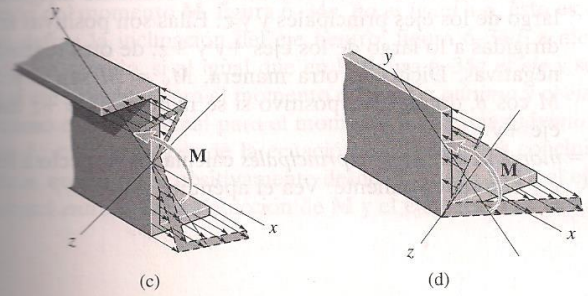
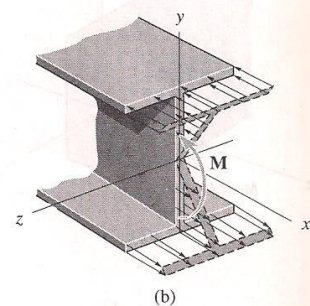
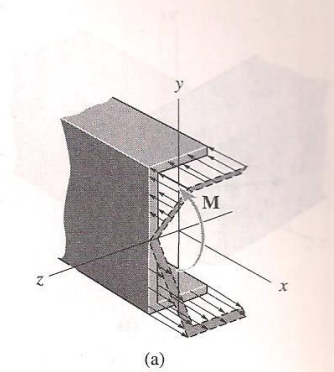


Figura 6-33

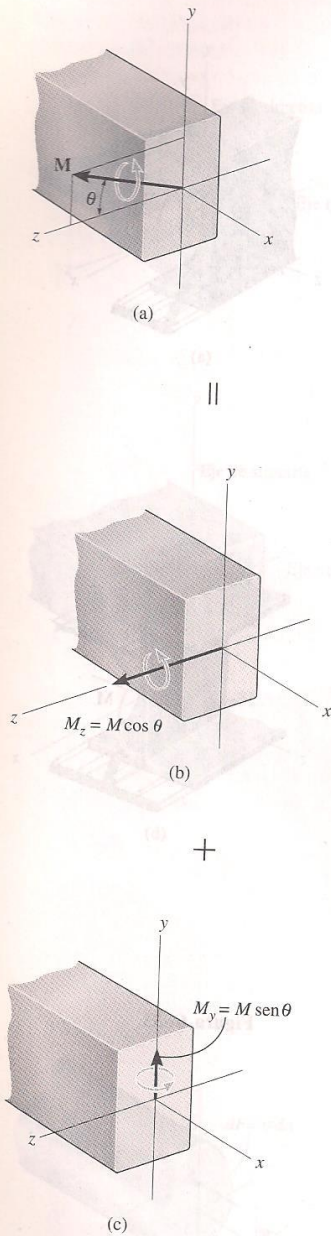


Figura 6-34

Momento aplicado arbitrariamente. En ocasiones un miembro puede estar cargado de modo tal que el momento interno resultante no actúa respecto a uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal. Cuando éste es el caso, el momento debe primero descomponerse en componentes dirigidas a lo largo de los ejes principales. La fórmula de la flexión puede entonces usarse para determinar el esfuerzo normal causado por cada componente del momento. Finalmente, usando el principio de superposición, el esfuerzo normal resultante en un punto puede determinarse.

Para mostrar cómo se hace esto, considere la viga con sección transversal rectangular sometida al momento \mathbf{M} mostrada en la figura 6-34a. Aquí, \mathbf{M} forma un ángulo θ con el eje principal z . Supondremos que θ es positivo cuando está dirigido del eje $+z$ hacia el eje $+y$, como se muestra. Descomponiendo \mathbf{M} en componentes a lo largo de los ejes z y y , tenemos $M_z = M \cos \theta$ y $M_y = M \sin \theta$, respectivamente. Cada una de esas componentes se muestra por separado sobre la sección transversal en las figuras 6-34b y 6-34c. Las distribuciones de esfuerzo normal que producen \mathbf{M} y sus componentes \mathbf{M}_z y \mathbf{M}_y , se muestran en las figuras 6-34d, 6-34e y 6-34f, respectivamente. Se supone aquí que $(\sigma_x)_{\text{máx}} > (\sigma'_x)_{\text{máx}}$. Por inspección, los esfuerzos máximos de tensión y de compresión $[(\sigma_x)_{\text{máx}} = (\sigma'_x)_{\text{máx}}]$ se presentan en dos esquinas opuestas de la viga, figura 6-34d.

Aplicando la fórmula de la flexión a cada componente del momento en las figuras 6-34b y 6-34c, podemos expresar el esfuerzo normal resultante en cualquier punto sobre la sección transversal, figura 6-34d, en términos generales como:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (6-17)$$

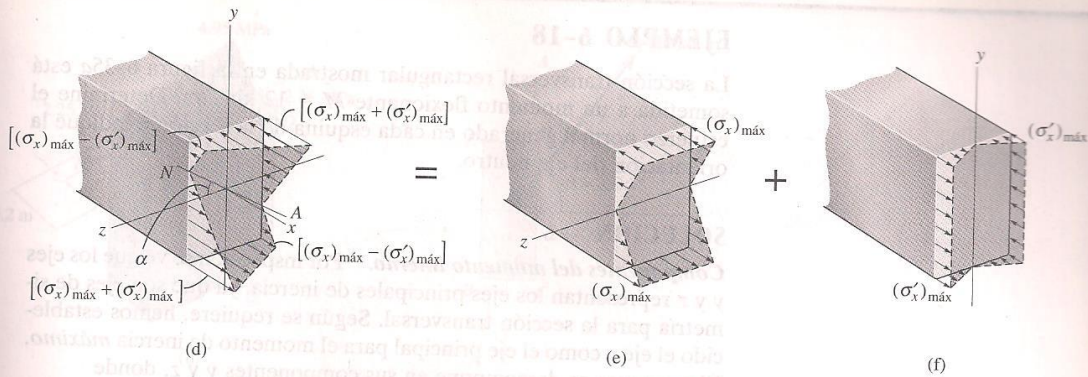
donde

σ = esfuerzo normal en el punto

y, z = coordenadas del punto medidas desde los ejes x, y, z que tienen su origen en el centroide de la sección transversal y forman un sistema coordenado derecho. El eje x está dirigido saliendo de la sección transversal y los ejes y y z representan respectivamente los ejes principales de momento de inercia mínimo y máximo de la sección transversal

M_y, M_z = componentes del momento interno resultante dirigidas a lo largo de los ejes principales y y z . Ellas son positivas si están dirigidas a lo largo de los ejes $+y$ y $+z$; de otra manera, son negativas. Dicho de otra manera, $M_y = M \sin \theta$ y $M_z = M \cos \theta$, donde θ es positivo si se mide del eje $+z$ hacia el eje $+y$

I_y, I_z = momentos de inercia principales calculados respecto a los ejes y y z , respectivamente. Vea el apéndice A.



Como mencionamos arriba, es *muy importante* que los ejes x, y, z formen un sistema derecho y que se asignen los signos algebraicos apropiados a las componentes del momento y a las coordenadas al aplicar esta ecuación. El esfuerzo resultante será de *tensión* si es *positivo* y de *compresión* si es *negativo*.

Orientación del eje neutro. El ángulo α del eje neutro en la figura 6-34d puede determinarse aplicando la ecuación 6-17 con $\sigma = 0$, ya que por definición, ningún esfuerzo normal actúa sobre el eje neutro. Tenemos:

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

Como $M_z = M \cos \theta$ y $M_y = M \sin \theta$, entonces:

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z \quad (6-18)$$

Ésta es la ecuación de la línea que define el eje neutro de la sección transversal. Como la pendiente de esta línea es $\tan \alpha = y/z$, entonces:

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (6-19)$$

Puede verse aquí que para *flexión asimétrica* el ángulo θ , que define la dirección del momento \mathbf{M} , figura 6-34a, *no es igual* a α , esto es, al ángulo que define la inclinación del eje neutro, figura 6-34d, a menos que $I_z = I_y$. En cambio, si al igual que en la figura 6-34a el eje y se escoge como el eje principal para el momento de inercia *mínimo* y el eje z se escoge como el eje principal para el momento de inercia *máximo*, de modo que $I_y < I_z$, entonces de la ecuación 6-19 podemos concluir que el ángulo α , que se mide positivamente desde el eje $+z$ hacia el eje $+y$, se encontrará *entre* la línea de acción de \mathbf{M} y el eje y , esto es, $\theta \leq \alpha \leq 90^\circ$.

B 61 51 29
62

EJEMPLO 6-18

La sección transversal rectangular mostrada en la figura 6-35a está sometida a un momento flexionante $M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Determine el esfuerzo normal generado en cada esquina de la sección e indique la orientación del eje neutro.

SOLUCIÓN

Componentes del momento interno. Por inspección se ve que los ejes y y z representan los ejes principales de inercia, ya que son ejes de simetría para la sección transversal. Según se requiere, hemos establecido el eje z como el eje principal para el momento de inercia *máximo*. El momento se descompone en sus componentes y y z , donde

$$M_y = -\frac{4}{5}(12 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -9.60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = \frac{3}{5}(12 \text{ kN} \cdot \text{m}) = 7.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Propiedades de la sección. Los momentos de inercia respecto a los ejes y y z son:

$$I_y = \frac{1}{12}(0.4 \text{ m})(0.2 \text{ m})^3 = 0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.2 \text{ m})(0.4 \text{ m})^3 = 1.067(10^{-3}) \text{ m}^4$$

Esfuerzos de flexión. Se tiene entonces:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 2.25 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_C = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -4.95 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_D = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -2.25 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_E = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 4.95 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

La distribución resultante del esfuerzo normal está esbozada, usando estos valores, en la figura 6-35b. Como el principio de superposición es aplicable, la distribución es lineal, como se muestra.

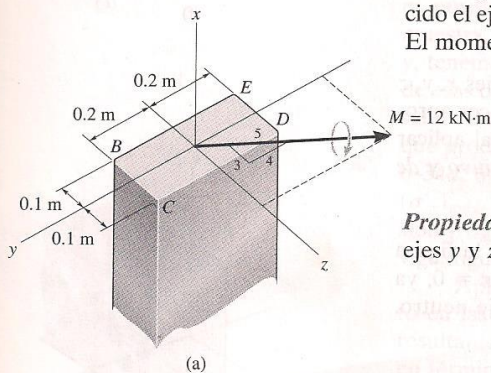
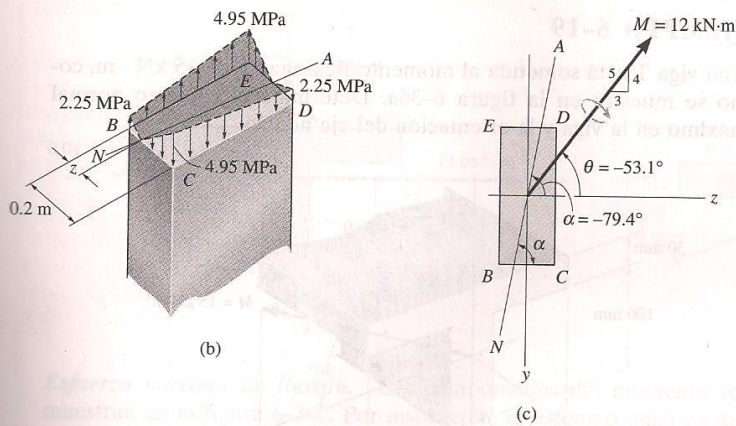


Figura 6-35



Orientación del eje neutro. La posición z del eje neutro (NA), figura 6-35b, puede determinarse por proporción. A lo largo del borde de BC se requiere:

$$\frac{2.25 \text{ MPa}}{z} = \frac{4.95 \text{ MPa}}{(0.2 \text{ m} - z)}$$

$$0.450 - 2.25z = 4.95z$$

$$z = 0.0625 \text{ m}$$

De la misma manera, ésta es también la distancia de D al eje neutro en la figura 6-35b.

Podemos establecer también la orientación del NA usando la ecuación 6-19, que se utiliza para determinar el ángulo α que el eje forma con el eje z o eje principal *máximo*. De acuerdo con nuestra convención de signos, θ debe medirse desde el eje $+z$ hacia el eje $+y$. Por comparación, en la figura 6-35c, $\theta = -\tan^{-1} \frac{4}{3} = -53.1^\circ$ (o $\theta = +306.9^\circ$). Así,

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$\tan \alpha = \frac{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} \tan(-53.1^\circ)$$

$$\alpha = -79.4^\circ$$

Resp.

Este resultado se muestra en la figura 6-35c. Usando el valor calculado antes de z , verifique, usando la geometría de la sección transversal, que se obtiene la misma respuesta.

EJEMPLO 6-19

Una viga T está sometida al momento flexionante de $15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, como se muestra en la figura 6-36a. Determine el esfuerzo normal máximo en la viga y la orientación del eje neutro.

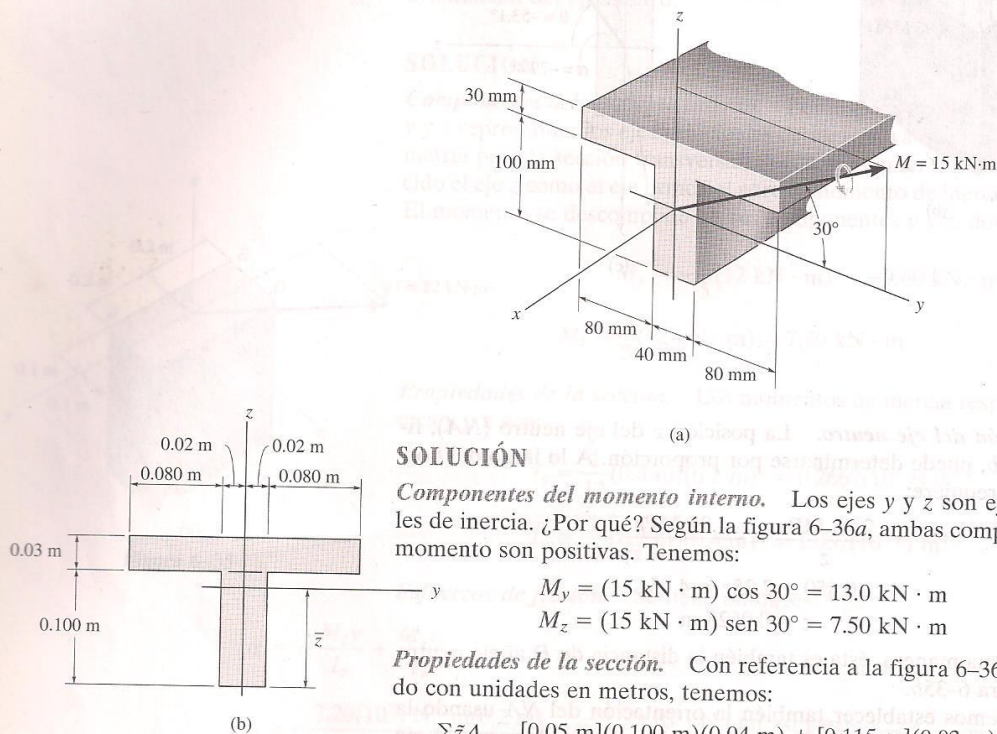


Figura 6-36

SOLUCIÓN

Componentes del momento interno. Los ejes y y z son ejes principales de inercia. ¿Por qué? Según la figura 6-36a, ambas componentes del momento son positivas. Tenemos:

$$M_y = (15 \text{ kN} \cdot \text{m}) \cos 30^\circ = 13.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (15 \text{ kN} \cdot \text{m}) \sin 30^\circ = 7.50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

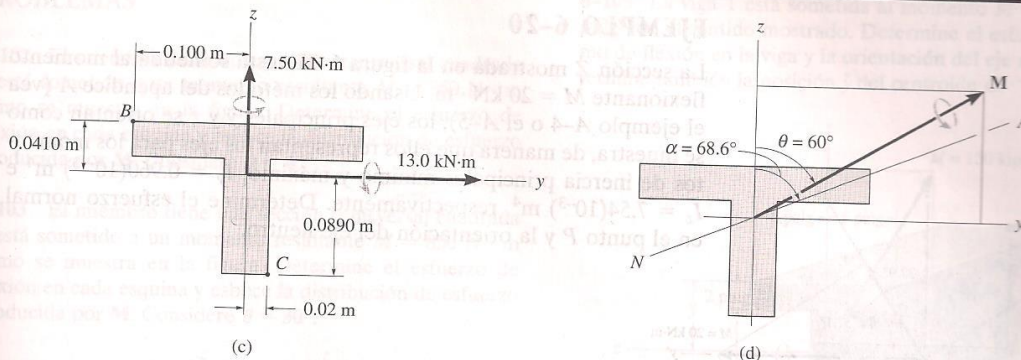
Propiedades de la sección. Con referencia a la figura 6-36b, trabajando con unidades en metros, tenemos:

$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z}A}{\sum A} = \frac{[0.05 \text{ m}](0.100 \text{ m})(0.04 \text{ m}) + [0.115 \text{ m}](0.03 \text{ m})(0.200 \text{ m})}{(0.100 \text{ m})(0.04 \text{ m}) + (0.03 \text{ m})(0.200 \text{ m})} = 0.0890 \text{ m}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos visto en el apéndice A, $I = \bar{I} + Ad^2$, los momentos de inercia principales son entonces:

$$I_z = \frac{1}{12}(0.100 \text{ m})(0.04 \text{ m})^3 + \frac{1}{12}(0.03 \text{ m})(0.200 \text{ m})^3 = 20.53(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(0.04 \text{ m})(0.100 \text{ m})^3 + (0.100 \text{ m})(0.04 \text{ m})(0.0890 \text{ m} - 0.05 \text{ m})^2 \right] + \left[\frac{1}{12}(0.200 \text{ m})(0.03 \text{ m})^3 + (0.200 \text{ m})(0.03 \text{ m})(0.115 \text{ m} - 0.0890 \text{ m})^2 \right] = 13.92(10^{-6}) \text{ m}^4$$



Esfuerzo máximo de flexión. Las componentes del momento se muestran en la figura 6-36c. Por inspección, el esfuerzo máximo de tensión ocurre en el punto B, ya que por superposición ambas componentes del momento generan ahí un esfuerzo de tensión. De la misma manera, el esfuerzo máximo de compresión ocurre en el punto C. Así,

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7.50 \text{ kN} \cdot \text{m} (-0.100 \text{ m})}{20.53(10^{-6}) \text{ m}^4} + \frac{13.0 \text{ kN} \cdot \text{m} (0.130 \text{ m} - 0.0890 \text{ m})}{13.92(10^{-6}) \text{ m}^4}$$

$$= 74.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{7.50 \text{ kN} \cdot \text{m} (0.020 \text{ m})}{20.53(10^{-6}) \text{ m}^4} + \frac{13.0 \text{ kN} \cdot \text{m} (-0.0890 \text{ m})}{13.92(10^{-6}) \text{ m}^4}$$

$$= -90.4 \text{ MPa}$$

Resp.

Por comparación, el esfuerzo normal máximo es, por tanto, de compresión y ocurre en el punto C.

Orientación del eje neutro. Al aplicar la ecuación 6-19 es importante definir correctamente los ángulos α y θ . Como se indicó antes, y debe representar el eje para el momento de inercia principal *mínimo* y z debe representar el eje para el momento de inercia principal *máximo*. Esos ejes están aquí apropiadamente posicionados ya que $I_y < I_z$. Usando este arreglo, θ y α se miden positivamente del eje $+z$ hacia el eje $+y$. Por tanto, de la figura 6-36a, $\theta = +60^\circ$. Entonces,

$$\tan \alpha = \frac{20.53(10^{-6}) \text{ m}^4}{13.92(10^{-6}) \text{ m}^4} \tan 60^\circ$$

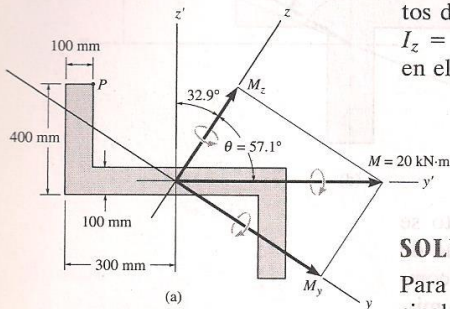
$$\alpha = 68.6^\circ$$

Resp.

El eje neutro se muestra en la figura 6-36d. Como era de esperarse, se encuentra entre el eje y y la línea de acción de M .

EJEMPLO 6-20

La sección Z mostrada en la figura 6-37a está sometida al momento flexionante $M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Usando los métodos del apéndice A (vea el ejemplo A-4 o el A-5), los ejes principales y y z se orientan como se muestra, de manera que ellos representan los ejes para los momentos de inercia principales mínimo y máximo, $I_y = 0.960(10^{-3}) \text{ m}^4$ e $I_z = 7.54(10^{-3}) \text{ m}^4$, respectivamente. Determine el esfuerzo normal en el punto P y la orientación del eje neutro.

**SOLUCIÓN**

Para usar la ecuación 6-19, es importante que el eje z sea el eje principal para el momento de inercia *máximo*, que efectivamente lo es ya que la mayor parte del área de la sección está más alejada de este eje que del eje y .

Componentes del momento interno. De la figura 6-37a,

$$M_y = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \sin 57.1^\circ = 16.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \cos 57.1^\circ = 10.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Esfuerzo de flexión. Las coordenadas y y z del punto P deben determinarse primero. Observe que las coordenadas y' , z' de P son $(-0.2 \text{ m}, 0.35 \text{ m})$. Usando los triángulos sombreados en la construcción mostrada en la figura 6-37b, tenemos:

$$y_P = -0.35 \sin 32.9^\circ - 0.2 \cos 32.9^\circ = -0.3580 \text{ m}$$

$$z_P = 0.35 \cos 32.9^\circ - 0.2 \sin 32.9^\circ = 0.1852 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación 6-17, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_P &= -\frac{M_z y_P}{I_z} + \frac{M_y z_P}{I_y} \\ &= -\frac{(10.86 \text{ kN} \cdot \text{m})(-0.3580 \text{ m})}{7.54(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{(16.79 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.1852 \text{ m})}{0.960(10^{-3}) \text{ m}^4} \\ &= 3.75 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Orientación del eje neutro. El ángulo $\theta = 57.1^\circ$ se muestra en la figura 6-37a. Así,

$$\tan \alpha = \left[\frac{7.54(10^{-3}) \text{ m}^4}{0.960(10^{-3}) \text{ m}^4} \right] \tan 57.1^\circ$$

$$\alpha = 85.3^\circ$$

Resp.

El eje neutro está localizado como se muestra en la figura 6-37b.

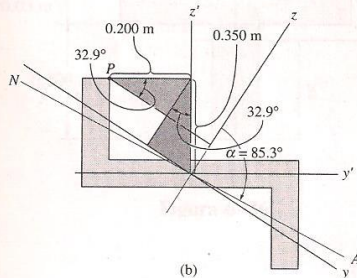
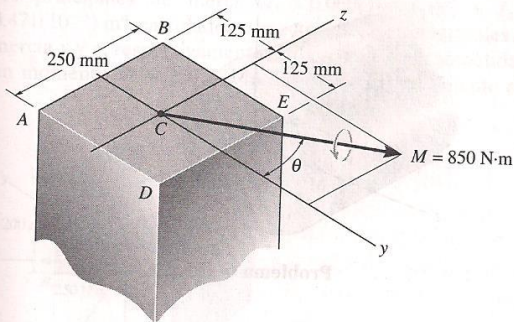


Figura 6-37

PROBLEMAS

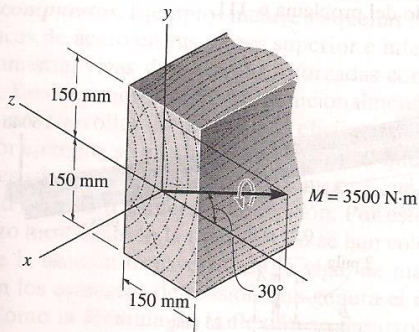
6-102 El miembro tiene una sección transversal cuadrada y está sometido a un momento resultante $M = 850 \text{ N} \cdot \text{m}$ como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo de flexión en cada esquina y esboce la distribución de esfuerzo producida por M . Considere $\theta = 45^\circ$.

6-103 El miembro tiene una sección transversal cuadrada y está sometido a un momento resultante $M = 850 \text{ N} \cdot \text{m}$ como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo de flexión en cada esquina y esboce la distribución de esfuerzo producida por M . Considere $\theta = 30^\circ$.



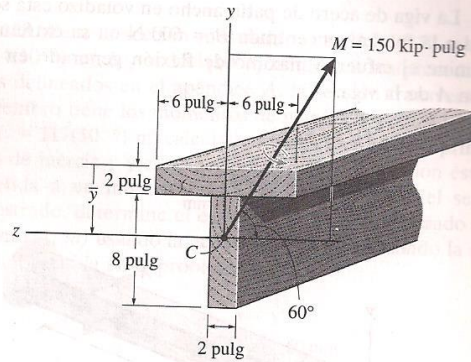
Problemas 6-102/6-103

***6-104** La viga tiene una sección transversal rectangular. Si está sometida a un momento $M = 3500 \text{ N} \cdot \text{m}$ con el sentido mostrado, determine el esfuerzo de flexión máximo en la viga y la orientación del eje neutro.



Problema 6-104

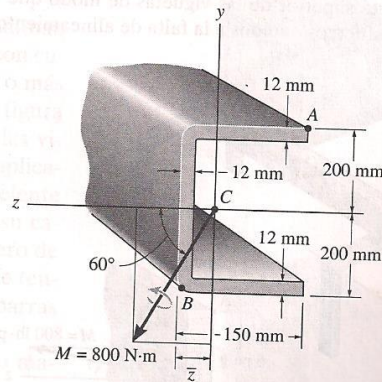
6-105 La viga T está sometida al momento $M = 150 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$ con el sentido mostrado. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la viga y la orientación del eje neutro. Determine también la posición \bar{y} del centroide C .



Problema 6-105

6-106 Si el momento interno que actúa sobre la sección transversal del puntal tiene una magnitud de $M = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ con el sentido mostrado en la figura, determine el esfuerzo de flexión en los puntos A y B . Determine también la posición \bar{z} del centroide C de la sección transversal del puntal, así como la orientación del eje neutro.

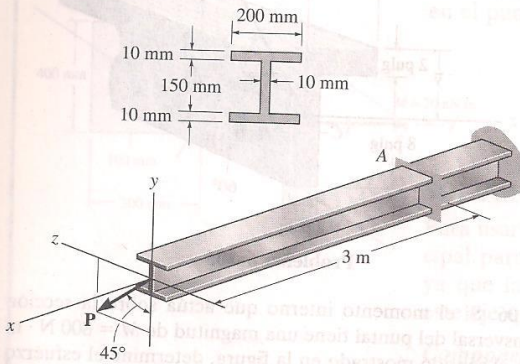
6-107 El momento resultante que actúa sobre la sección transversal del puntal de aluminio tiene una magnitud de $M = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ y el sentido mostrado en la figura. Determine el esfuerzo máximo de flexión en el puntal. Determine también la posición \bar{y} del centroide C de la sección transversal del puntal, así como la orientación del eje neutro.



Problemas 6-106/6-107

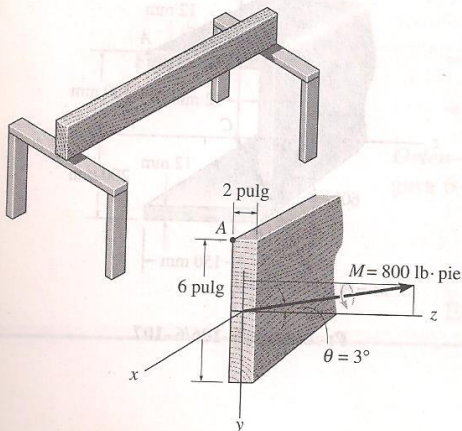
***6-108** La viga de acero de patín ancho en voladizo está sometida a la fuerza P concentrada en su extremo. Determine la magnitud máxima de esta fuerza tal que el esfuerzo de flexión generado en A no exceda el valor $\sigma_{perm} = 180 \text{ MPa}$.

6-109 La viga de acero de patín ancho en voladizo está sometida a la fuerza concentrada $P = 600 \text{ N}$ en su extremo. Determine el esfuerzo máximo de flexión generado en la sección A de la viga.



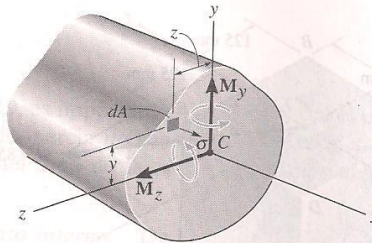
Problemas 6-108/6-109

6-110 El tablón se usa como vigueta de piso simplemente apoyada. Si se aplica un momento $M = 800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a 3° del eje z , determine el esfuerzo de flexión generado en el tablón en la esquina A . Compare este esfuerzo con el generado por el mismo momento aplicado a lo largo del eje z ($\theta = 0^\circ$). ¿Qué valor tiene el ángulo α para el eje neutro cuando $\theta = 3^\circ$? *Comentario:* Normalmente, las duelas del piso se clavan a la parte superior de las viguetas de modo que $\theta \approx 0^\circ$ y los altos esfuerzos debidos a la falta de alineamiento no se presentan.



Problema 6-110

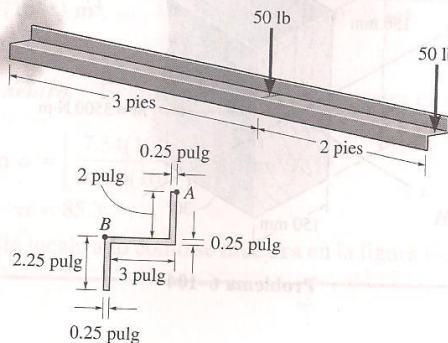
6-111 Considere el caso general de una viga prismática sometida a las componentes de momento M_y y M_z como se muestra, cuando los ejes x , y , z pasan por el centroide de la sección transversal. Si el material es elástico-lineal, el esfuerzo normal en la viga es una función lineal de la posición tal que $\sigma = a + by + cz$. Usando las condiciones de equilibrio $0 = \int_A \sigma dA$, $M_y = \int_A z \sigma dA$, $M_z = \int_A -y \sigma dA$, determine las constantes a , b y c y demuestre que el esfuerzo normal puede determinarse con la ecuación $\sigma = [-(M_z I_y + M_y I_{yz})y + (M_y I_z + M_z I_{yz})z] / (I_y I_z - I_{yz}^2)$. Los momentos y productos de inercia están definidos en el apéndice A.



Problema 6-111

***6-112** La viga en voladizo tiene la sección transversal Z mostrada. Bajo la acción de las dos cargas, determine el esfuerzo máximo de flexión en el punto A de la viga. Use el resultado del problema 6-111.

6-113 La viga en voladizo tiene la sección transversal Z mostrada. Bajo la acción de las dos cargas, determine el esfuerzo máximo de flexión en el punto B de la viga. Use el resultado del problema 6-111.

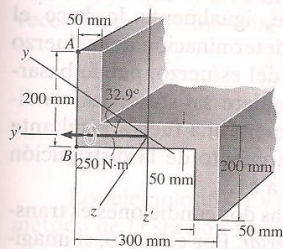


Problemas 6-112/6-113

6-114 De acuerdo con los procedimientos delineados en el apéndice A, ejemplo A-5 o A-6, la sección Z tiene los momentos de inercia principales $I_y = 0.060(10^{-3}) \text{ m}^4$ e $I_z = 0.471(10^{-3}) \text{ m}^4$, respecto a los ejes principales de inercia y y z , respectivamente. Si la sección está sometida a un momento $M = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ dirigido horizontalmente como se muestra, determine el esfuerzo de flexión generado en el punto A. Resuelva el problema usando la ecuación 6-17.

6-115 Resuelva el problema 6-114 usando la ecuación desarrollada en el problema 6-111.

***6-116** Según los procedimientos delineados en el apéndice A, ejemplo A-5 o A-6, la sección Z tiene los momentos principales de inercia $I_y = 0.060(10^{-3}) \text{ m}^4$ e $I_z = 0.471(10^{-3}) \text{ m}^4$, calculados respecto a los ejes principales de inercia y y z , respectivamente. Si la sección está sometida a un momento $M = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ dirigido horizontalmente co-

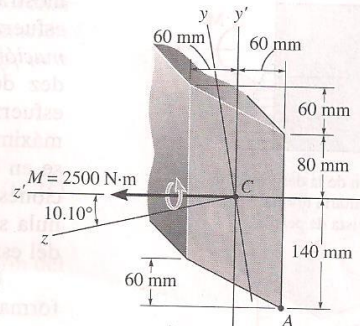


Problemas 6-114/6-115/6-116

mo se muestra, determine el esfuerzo de flexión generado en el punto B. Resuelva el problema usando la ecuación 6-17.

6-117 Resuelva el problema 6-116 usando la ecuación desarrollada en el problema 6-111.

6-118 Para la sección mostrada, $I_y = 31.7(10^{-6}) \text{ m}^4$, $I_z = 114(10^{-6}) \text{ m}^4$, $I_{yz} = 15.1(10^{-6}) \text{ m}^4$. Según los procedimientos delineados en el apéndice A, la sección transversal del miembro tiene los momentos de inercia $I_y = 29.0(10^{-6}) \text{ m}^4$ e $I_z = 117(10^{-6}) \text{ m}^4$ calculados respecto a los ejes principales de inercia y y z , respectivamente. Si la sección está sometida a un momento $M = 2500 \text{ N} \cdot \text{m}$ con el sentido mostrado, determine el esfuerzo de flexión generado en el punto A, (a) usando la ecuación 6-17 y (b) usando la ecuación obtenida en el problema 6-111.



Problema 6-118

*6.6 VIGAS COMPUESTAS

Las vigas construidas de dos o más materiales diferentes se denominan **vigas compuestas**. Ejemplos incluyen aquellas hechas de madera con cubreplacas de acero en sus partes superior e inferior, figura 6-38a, o más comúnmente, vigas de concreto reforzadas con barras de acero, figura 6-38b. Los ingenieros diseñan intencionalmente de esta manera las vigas para desarrollar un medio más eficiente de tomar las cargas aplicadas. Por ejemplo, se mostró en la sección 3.3 que el concreto es excelente para resistir esfuerzos de compresión pero que es muy pobre en su capacidad de resistir esfuerzos de tensión. Por esto, las barras de acero de refuerzo mostradas en la figura 6-38b se han colocado en la zona de tensión de la sección transversal de la viga, de manera que dichas barras resistan los esfuerzos de tensión que genera el momento M .

Como la fórmula de la flexión se desarrolló para vigas cuyo material es homogéneo, esta fórmula no puede aplicarse directamente para determinar el esfuerzo normal en una viga compuesta. Sin embargo, en esta sección desarrollaremos un método para modificar o "transformar" la sección transversal de la viga en otra hecha de un solo material. Una vez hecho esto, la fórmula de la flexión puede entonces usarse para el análisis de los esfuerzos.

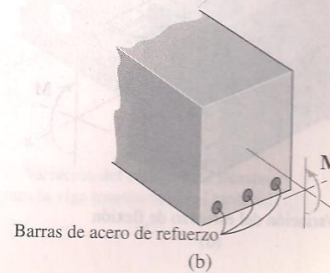
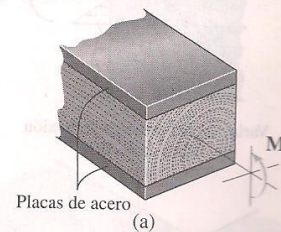


Figura 6-38

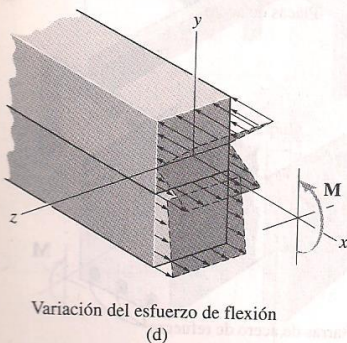
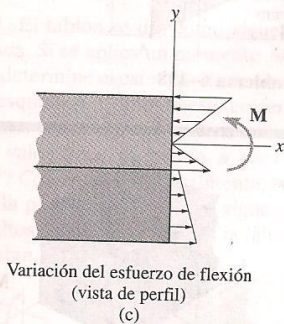
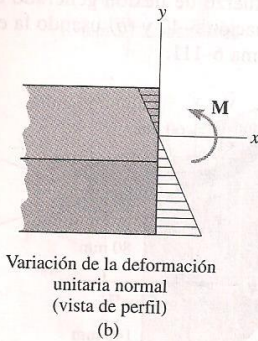
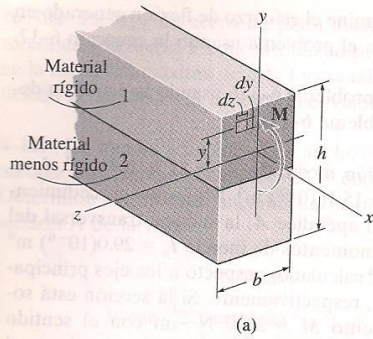


Figura 6-39

Para explicar cómo aplicar el *método de la sección transformada*, consideremos la viga compuesta hecha de dos materiales, 1 y 2, que tienen las secciones transversales mostradas en la figura 6-39a. Si se aplica un momento flexionante a esta viga, entonces, como en el caso de una viga homogénea, la sección transversal total *permanecerá plana* después de la flexión y por consiguiente las deformaciones unitarias normales variarán linealmente de cero en el eje neutro a un valor máximo en el material más alejado de este eje, figura 6-39b. Si el material tiene un comportamiento elástico lineal, la ley de Hooke es aplicable y en cualquier punto el esfuerzo normal en el material 1 se determina con la relación $\sigma = E_1 \epsilon$. Igualmente, para el material 2, la distribución del esfuerzo se encuentra con la relación $\sigma = E_2 \epsilon$. Es claro que si el material 1 es *más rígido* que el material 2, por ejemplo, acero *versus* hule, la mayor parte de la carga será tomada por el material 1, ya que $E_1 > E_2$. Suponiendo que este es el caso, la distribución del esfuerzo será como la mostrada en la figura 6-39c o 6-39d. En particular, note el salto en el esfuerzo que ocurre donde se unen los dos materiales. Aquí, la *deformación unitaria* es la *misma*, pero como el módulo de elasticidad o rigidez de los materiales cambia bruscamente, igualmente lo hace el esfuerzo. La localización del eje neutro y la determinación del esfuerzo máximo en la viga, usando esta distribución del esfuerzo, puede basarse en un procedimiento de tanteos. Esto requiere satisfacer las condiciones de que la distribución del esfuerzo genera una fuerza resultante nula sobre la sección transversal y que el momento de la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro sea igual a M .

Una manera más simple de satisfacer esas dos condiciones es transformar la viga en otra hecha de un *solo material*. Por ejemplo, si imaginamos que la viga consiste enteramente del material 2 menos rígido, entonces la sección transversal se verá como la mostrada en la figura 6-39e. Aquí, la altura h de la viga permanece *igual*, ya que la distribución de la deformación unitaria mostrada en la figura 6-39b debe preservarse. Sin embargo, la porción superior de la viga debe ser ampliada para que tome una carga *equivalente* a la que soporta el material 1 más rígido, figura 6-39d. El ancho necesario puede determinarse considerando la fuerza dF que actúa sobre un área $dA = dz dy$ de la viga en la figura 6-39a. Se tiene, $dF = \sigma dA = (E_1 \epsilon) dz dy$. Por otra parte, si el ancho de un *elemento correspondiente* de altura dy en la figura 6-39e es $n dz$, entonces $dF' = \sigma' dA' = (E_2 \epsilon) n dz dy$. Igualando esas fuerzas, de modo que ellas produzcan el mismo momento respecto al eje z , tenemos

$$E_1 \epsilon dz dy = E_2 \epsilon n dz dy$$

$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad (6-20)$$

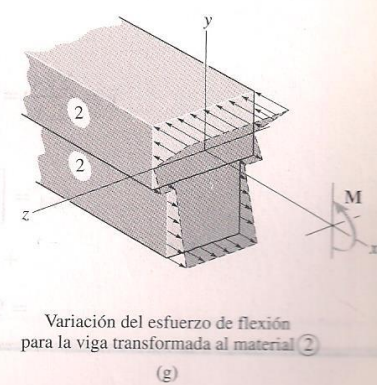
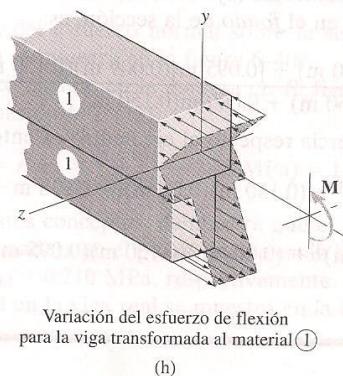
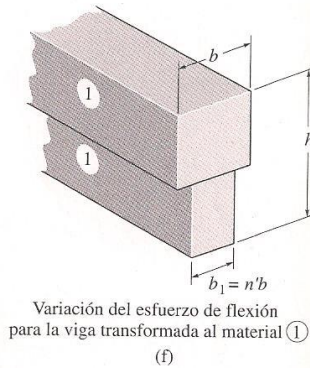
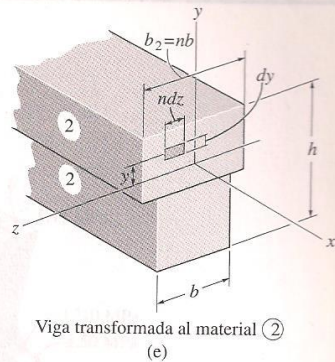
Este número n sin dimensiones se llama *factor de transformación*. Indica que la sección transversal con ancho b en la viga original, figura 6-39a, debe incrementarse en ancho a $b_2 = nb$ en la región donde el ma-

terial 1 va a ser transformado en material 2, figura 6-39e. De manera similar, si el material 2 menos rígido va a transformarse en el material 1 más rígido, la sección transversal se verá como la mostrada en la figura 6-39f. Aquí, el ancho del material 2 se ha cambiado a $b_1 = n'b$, donde $n' = E_2/E_1$. Advierta que en este caso el factor de transformación n' debe ser *menor que uno* ya que $E_1 > E_2$. En otras palabras, necesitamos menos del material más rígido para soportar un momento dado.

Una vez que la viga ha sido transformada en otra hecha con un *solo material*, la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transformada será lineal como se muestra en la figura 6-39g o 6-39h. En consecuencia, el centroide (eje neutro) y el momento de inercia de la sección transformada pueden determinarse y aplicarse la fórmula de flexión de la manera usual para determinar el esfuerzo en cada punto de la viga transformada. Observe que el esfuerzo en la viga transformada es equivalente al esfuerzo en el *mismo material* de la viga real. Sin embargo, para el *material transformado*, el esfuerzo encontrado en la sección transformada tiene que ser multiplicado por el factor de transformación n (o n'), ya que el área del material transformado, $dA' = n dz dy$, es n veces el área del material real $dA = dz dy$. Esto es:

$$\begin{aligned} dF &= \sigma dA = \sigma' dA' \\ \sigma dz dy &= \sigma' n dz dy \\ \sigma &= n\sigma' \end{aligned} \quad (6-21)$$

Los ejemplos 6-21 y 6-22 ilustran numéricamente la aplicación del método de la sección transformada.



EJEMPLO 6-21

Una viga compuesta está hecha de madera y está reforzada con una cubreplaca de acero localizada en el fondo de la viga. Tiene la sección transversal mostrada en la figura 6-40a. Si la viga está sometida al momento flexionante $M = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determine el esfuerzo normal en los puntos B y C . Considere $E_{mad} = 12 \text{ GPa}$ y $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$.

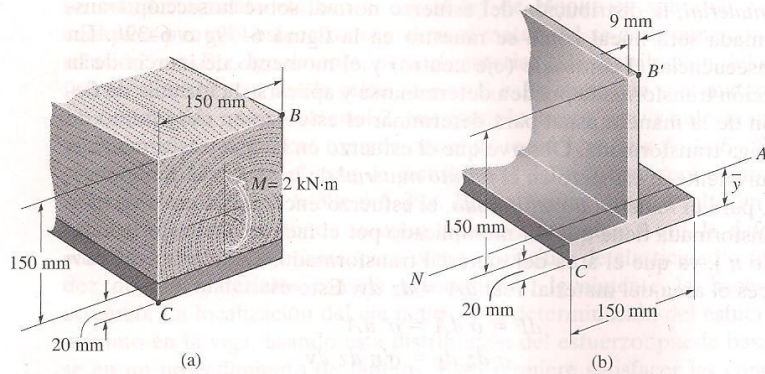


Figura 6-40(a-d)

SOLUCIÓN

Propiedades de la sección. Aunque la selección es arbitraria, transformaremos aquí la sección en una hecha enteramente de acero. Como el acero tiene una mayor rigidez que la madera ($E_{ac} > E_{mad}$), el ancho de la madera debe *reducirse* a un ancho equivalente de acero. Por tanto, n debe ser menor que 1. Para que esto sea el caso, $n = E_{mad}/E_{ac}$, por lo que:

$$b_{ac} = nb_{mad} = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}} (150 \text{ mm}) = 9 \text{ mm}$$

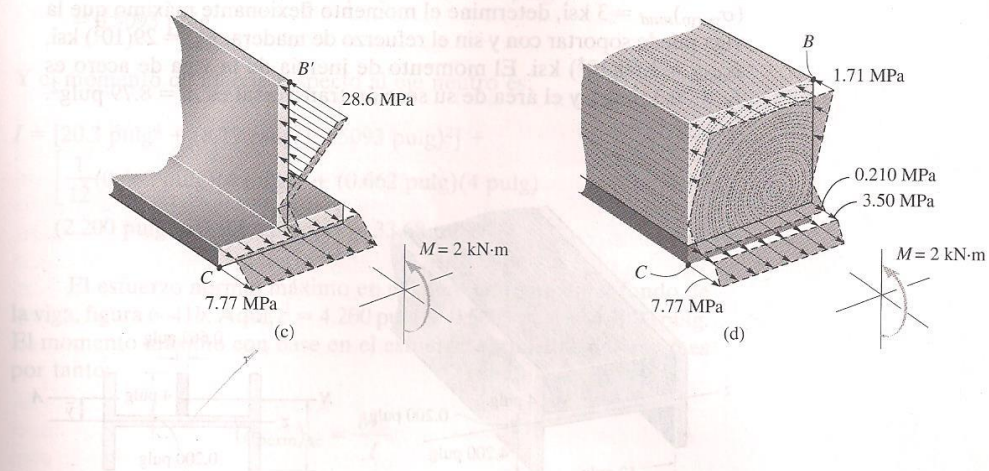
La sección transformada se muestra en la figura 6-40b.

La posición del centroide (eje neutro), calculada respecto a un eje de referencia situado en el *fondo* de la sección, es:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[0.01 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.150 \text{ m}) + [0.095 \text{ m}](0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{0.02 \text{ m}(0.150 \text{ m}) + 0.009 \text{ m}(0.150 \text{ m})} = 0.03638 \text{ m}$$

El momento de inercia respecto al eje neutro es entonces:

$$\begin{aligned} I_{NA} &= \left[\frac{1}{12} (0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.03638 \text{ m} - 0.01 \text{ m})^2 \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{12} (0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.095 \text{ m} - 0.03638 \text{ m})^2 \right] \\ &= 9.36(10^{-6}) \text{ m}^4 \end{aligned}$$



Esfuerzo normal. Aplicando la fórmula de la flexión, el esfuerzo normal en B' y C es:

$$\sigma_{B'} = \frac{2 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m} - 0.03638 \text{ m})}{9.36(10^{-6}) \text{ m}^4} = 28.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.03638 \text{ m})}{9.36(10^{-6}) \text{ m}^4} = 7.77 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

La distribución del esfuerzo normal sobre la sección transformada (toda de acero) se muestra en la figura 6-40c.

El esfuerzo normal en la madera en B , figura 6-40a, se determina con la ecuación 6-21; así,

$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}}(28.6 \text{ MPa}) = 1.71 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Usando estos conceptos, demuestre que el esfuerzo normal en el acero y en la madera en el punto en que están en contacto es $\sigma_{ac} = 3.50 \text{ MPa}$ y $\sigma_{mad} = 0.210 \text{ MPa}$, respectivamente. La distribución del esfuerzo normal en la viga real se muestra en la figura 6-40d.

EJEMPLO 6-22

Para reforzar la viga de acero, se coloca un tablón de roble entre sus patines como se muestra en la figura 6-41a. Si el esfuerzo normal permisible para el acero es $(\sigma_{perm})_{ac} = 24$ ksi y para la madera es $(\sigma_{perm})_{mad} = 3$ ksi, determine el momento flexionante máximo que la viga puede soportar con y sin el refuerzo de madera. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_{mad} = 1.60(10^3)$ ksi. El momento de inercia de la viga de acero es $I_z = 20.3$ pulg⁴, y el área de su sección transversal es $A = 8.79$ pulg².

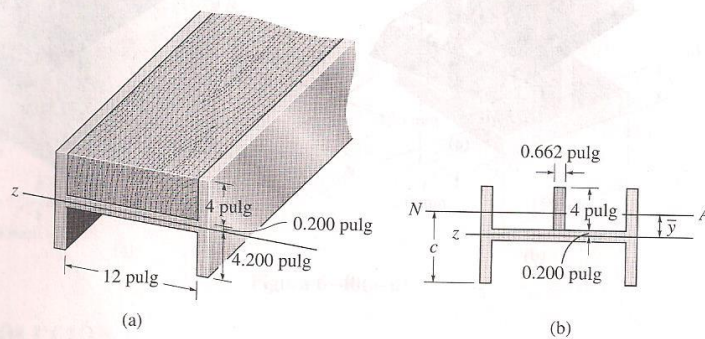


Figura 6-41

SOLUCIÓN

Sin madera. Aquí el eje neutro coincide con el eje z . La aplicación directa de la fórmula de la flexión a la viga de acero nos da:

$$(\sigma_{perm})_{ac} = \frac{Mc}{I_z}$$

$$24 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{M(4.200 \text{ pulg})}{20.3 \text{ pulg}^4}$$

$$M = 116 \text{ kip} \cdot \text{pulg} \quad \text{Resp.}$$

Con madera. Como ahora tenemos una viga compuesta, debemos transformar la sección a un solo material. Será más fácil transformar la madera a una cantidad equivalente de acero. Para hacer esto, $n = E_{mad}/E_{ac}$. ¿Por qué? Así, el ancho de una cantidad equivalente de acero es:

$$b_{ac} = nb_{mad} = \frac{1.60(10^3) \text{ ksi}}{29(10^3) \text{ ksi}} (12 \text{ pulg}) = 0.662 \text{ pulg}$$

La sección transformada se muestra en la figura 6-41b. El eje neutro está en:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[0](8.79 \text{ pulg}^2) + [2.20 \text{ pulg}](4 \text{ pulg})(0.662 \text{ pulg})}{8.79 \text{ pulg}^2 + 4(0.662 \text{ pulg}^2)} = 0.5093 \text{ pulg}$$

Y el momento de inercia respecto al eje neutro es:

$$I = [20.3 \text{ pulg}^4 + (8.79 \text{ pulg}^2)(0.5093 \text{ pulg})^2] + \left[\frac{1}{12}(0.662 \text{ pulg})(4 \text{ pulg})^3 + (0.662 \text{ pulg})(4 \text{ pulg})(2.20 \text{ pulg} - 0.5093 \text{ pulg})^2 \right] = 33.68 \text{ pulg}^4$$

El esfuerzo normal máximo en el acero ocurrirá en el fondo de la viga, figura 6-41b. Aquí, $c = 4.200 \text{ pulg} + 0.5093 \text{ pulg} = 4.7093 \text{ pulg}$. El momento máximo con base en el esfuerzo permisible del acero es por tanto:

$$(\sigma_{\text{perm}})_{ac} = \frac{Mc}{I}$$

$$24 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{M(4.7093 \text{ pulg})}{33.68 \text{ pulg}^4}$$

$$M = 172 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$$

El esfuerzo normal máximo en la madera se presenta en la parte superior de la viga, figura 6-41b. Aquí, $c' = 4.20 \text{ pulg} - 0.5093 \text{ pulg} = 3.6907 \text{ pulg}$. Como $\sigma_{\text{mad}} = n\sigma_{ac}$, el momento máximo con base en el esfuerzo permisible de la madera es:

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{mad}} = n \frac{M'c'}{I}$$

$$3 \text{ kip/pulg}^2 = \left[\frac{1.60(10^3) \text{ ksi}}{29(10^3) \text{ ksi}} \right] \frac{M'(3.6907 \text{ pulg})}{33.68 \text{ pulg}^4}$$

$$M' = 496 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$$

Por comparación, el momento máximo está regido por el esfuerzo permisible en el acero. Así,

$$M = 172 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$$

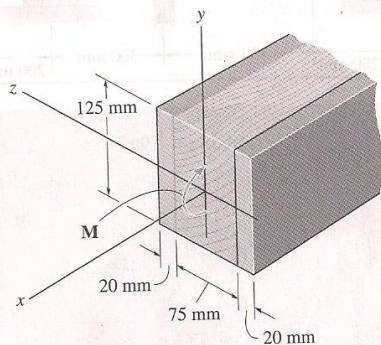
Resp.

Advierta también que al usar la madera como refuerzo, se proporciona una capacidad adicional de 48% de momento para la viga.

PROBLEMAS DE REPASO

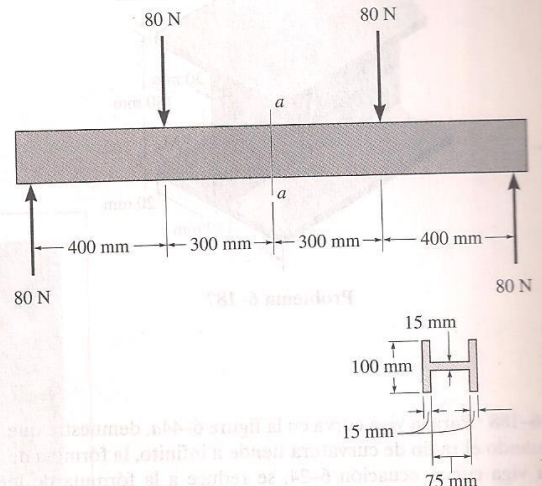
6-182 La viga compuesta consta de un núcleo de madera y de dos placas de acero. Si el esfuerzo permisible de flexión para la madera es $(\sigma_{perm})_{mad} = 20 \text{ MPa}$ y para el acero es $(\sigma_{perm})_{ac} = 130 \text{ MPa}$, determine el momento máximo que puede aplicarse a la viga. $E_{mad} = 11 \text{ GPa}$ y $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$.

6-183 Resuelva el problema 6-182, considerando que el momento $M = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ está aplicado respecto al eje y y no con respecto al eje z , como está indicado.



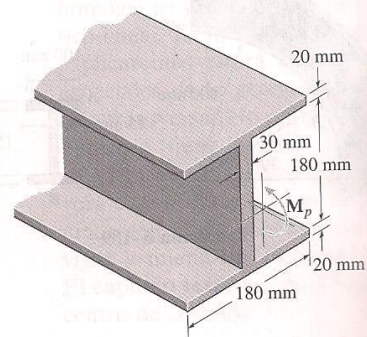
Problemas 6-182/6-183

6-185 Determine la distribución del esfuerzo de flexión en la sección $a-a$ de la viga. Esboce la distribución, en una vista tridimensional, actuando sobre la sección transversal.



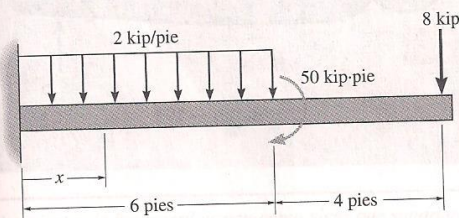
Problema 6-185

6-186 Determine el módulo plástico y el factor de forma para la viga de patín ancho.



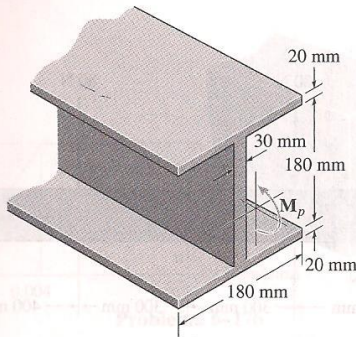
Problema 6-186

***6-184** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga y determine la fuerza cortante y el momento en la viga en función de x , para $0 \leq x < 6$ pies.



Problema 6-184

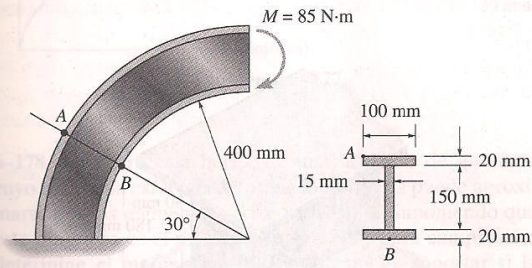
6-187 La viga está hecha con un material elasto-plástico cuyo $\sigma_y = 250$ MPa. Determine el esfuerzo residual en la parte superior e inferior de la viga después de que se aplica el momento plástico M_p y luego se retira.



Problema 6-187

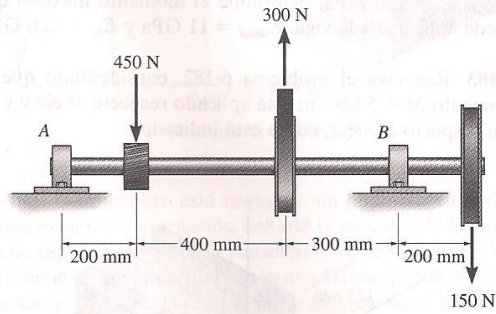
*6-188 Para la viga curva en la figura 6-44a, demuestre que cuando el radio de curvatura tiende a infinito, la fórmula de la viga curva, ecuación 6-24, se reduce a la fórmula de la flexión, ecuación 6-13.

6-189 La viga curva está sometida a un momento flexionante $M = 85$ N · m como se muestra. Determine el esfuerzo en los puntos A y B y muestre el esfuerzo sobre un elemento de volumen localizado en esos puntos.



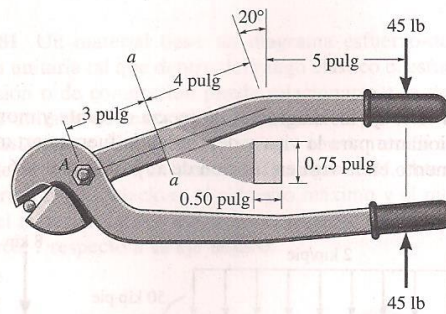
Problema 6-189

6-190 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la flecha sometida a las cargas verticales de la banda, engrane y volante. Los cojinetes en A y en B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



Problema 6-190

6-191 Determine el esfuerzo máximo de flexión en la sección a-a en la manija de las tenazas. Se aplica una fuerza de 45 lb a las manijas. La sección transversal de éstas se muestra en la figura.



Problema 6-191

- 5-137. 216 psi
 5-138. 1.59°
 5-139. 26.2 N, 1.86°
 5-141. $T_{\text{cir}} = 0.282 A^{3/2} \tau_Y$, la flecha circular tomará el par mayor, la flecha elíptica 73.7%, la flecha triangular 62.2%
 5-142. 1.10 kW, 825 kPa
 5-143. 2.03 MPa, 0.258°

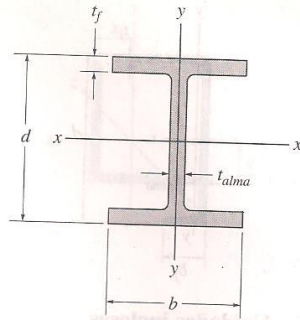
Capítulo 6

- 6-1. $V_{\text{máx}} = -24$ kn, $M_{\text{máx}} = -6$ kN · m
 6-2. $T_1 = 250$ lb, $T_2 = 200$ lb
 6-3. $V_{\text{máx}} = -108$ lb, $M_{\text{máx}} = 1196$ lb · m
 6-5. $V_{\text{máx}} = 15$ kn, $M_{\text{máx}} = 60$ kN · m
 6-6. 15.6 N, $M = (15.6x + 100)$ N · m
 6-7. $V_{\text{máx}} = 18$ kN, $M_{\text{máx}} = -75$ kN · m
 6-9. $V_{\text{máx}} = 11.7$ kip, $M_{\text{máx}} = 46.7$ kip · pie
 6-10. $V_{\text{máx}} = -2$ kip, $M_{\text{máx}} = -6$ kip · pie
 6-11. $a = 0.866L$
 6-13. $V_{\text{máx}} = \pm P/2$, $M_{\text{máx}} = -PL/4$
 6-15. $V = 17.7 - 1.5x$, $M = -0.75x^2 + 17.7x - 96.25$
 6-17. 281 lb · pie
 6-18. $V_{\text{máx}} = \pm 7$ kip, $M_{\text{máx}} = 21$ kip · pie
 6-19. $V_{\text{máx}} = -10$ kip, $M_{\text{máx}} = -27.5$ kip · pie
 6-21. $V = 1050 - 150x$, $M = -75x^2 + 1050x - 3200$
 6-22. $V_{\text{máx}} = \pm 2.8$ kN, $M_{\text{máx}} = -2.4$ kN · m
 6-23. $V_{\text{máx}} = -2$ kip, $M_{\text{máx}} = -12$ kip · pie
 6-25. $V_{\text{máx}} = 20$ kip, $M_{\text{máx}} = -120$ kip · pie
 6-27. $a = \frac{L}{\sqrt{2}}$
 6-29. $V_{\text{máx}} = \pm w_0 L/2$, $M_{\text{máx}} = W_0 L^2/12$
 6-30. $V_{\text{máx}} = -w_0 L/4$, $M_{\text{máx}} = 0.0345 w_0 L^2$
 6-31. $V_{\text{máx}} = \pm w_0 L/3$, $M_{\text{máx}} = 23 w_0 L^2/216$
 6-33. $V_{\text{máx}} = \pm 112.5$ kN, $M_{\text{máx}} = 169$ kN · m
 6-34. $V = \frac{3w_0 L}{4} - w_0 x$, $M = \frac{-w_0 x^2}{2} + \frac{3w_0 L}{4} x - \frac{7w_0 L^2}{24}$, $V = \frac{w_0(L-x)^2}{L}$, $M = \frac{-w_0(L-x)^3}{3L}$
 6-35. $w_0 = 1.2$ kN/m
 6-37. $M = 0.0190 w L^2$
 6-39. $V = 500 - \frac{100}{3} x^2$, $M = -\frac{100}{9} x^3 + 500x - 600$
 6-41. $V_{\text{máx}} = 21.3$ kip, $M_{\text{máx}} = -128$ kip · pie
 6-42. $V_{\text{máx}} = 2w_0 L/\pi$, $M_{\text{máx}} = -w_0 L^2/\pi$
 6-43. 167 psi, 333 psi
 6-45. $M = 2.50$ kip · pie
 6-46. $(\sigma_{\text{máx}})_t = 2.40$ ksi, $(\sigma_{\text{máx}})_c = 4.80$ ksi
 6-47. $I = 34.53(10^{-6})$ m⁴, $\sigma_{\text{máx}} = 2.06$ MPa
 6-49. a) $(M_{\text{perm}})_z = 20.8$ kip · pie,
 b) $(M_{\text{perm}})_y = 6.00$ kip · pie
 6-50. $\sigma_A = 199$ MPa, $\sigma_B = 66.2$ MPa
 6-51. $I = 0.3633(10^{-6})$ m⁴, $\sigma_B = 3.61$ MPa, $\sigma_C = 1.55$ MPa
 6-53. $F_{RA} = 0$, $F_{RB} = 1.50$ kN
 6-54. $I = 200.27$ pulg⁴, $\sigma_D = 5.00$ ksi, $F_A = 17.7$ kip,
 $F_B = 13.7$ kip
 6-55. $I = 200.27$ pulg⁴, 22.6%
 6-57. $I = 1093.07$ pulg⁴, $(F_R)_C = 11.8$ kip
 6-58. 15.4 ksi
 6-59. $I = 4.367$ pulg⁴, $\sigma_A = 214$ psi, $\sigma_B = 33.0$ psi
 6-61. 61.1 MPa
 6-62. 3.61 ksi
 6-63. 9.05 MPa
 6-65. 15.6 ksi
 6-66. 2.75 pulg
 6-67. 24 ksi
 6-69. 33.8 ksi
 6-70. 331 kPa
 6-71. 12.2 ksi
 6-73. 31.3 mm
 6-74. 13.6 ksi
 6-75. 1.28 pulg
 6-77. 119 lb
 6-78. 1.35 ksi
 6-79. 20.4 ksi
 6-81. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{PL}{bd^2}$
 6-82. 22.1 ksi
 6-83. $w_2 = 800$ lb/pulg, $w_1 = 533$ lb/pulg, $\sigma_{\text{máx}} = 45.1$ ksi
 6-85. 249 kPa
 6-86. 2.32 ksi
 6-87. 5.60 ksi
 6-89. 66.8 ksi
 6-90. 10.4 kN
 6-91. 11.5 MPa
 6-93. 114 kip

- 6-94. 25.8 ksi
 6-95. 21.1 ksi
 6-97. 2.18 ksi
 6-98. $h' = \frac{8}{9}h$, 1.05
 6-99. 8.36 pulg, 23.5 kip · pie
 6-101. $c = \frac{h\sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}$, $(\sigma_{\max})_c = \frac{3M}{bh^2} \left(\frac{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t}} \right)$
 6-102. $\sigma_A = 0$, $\sigma_B = 462$ kPa, $\sigma_D = -462$ kPa, $\sigma_E = 0$
 6-103. $\sigma_A = -119$ kPa, $\sigma_B = 446$ kPa, $\sigma_D = -446$ kPa, $\sigma_E = 119$ kPa
 6-105. $\sigma_A = 3.33$ ksi, $\alpha = -63.1^\circ$
 6-106. $\bar{z} = 36.6$ mm, $I_z = 0.18869(10^{-3})$ m⁴, $I_y = 16.3374(10^{-6})$ m⁴, $\sigma_A = 4.38$ MPa, $\sigma_B = -1.13$ MPa, $\alpha = -87.1^\circ$
 6-107. $\bar{z} = 36.6$ mm, $I_z = 0.18869(10^{-3})$ m⁴, $I_y = 16.3374(10^{-6})$ m⁴, $\sigma_A = 4.38$ MPa, $\sigma_B = -1.13$ MPa, $\sigma_E = 5.23$ MPa
 6-109. 13.3 MPa
 6-110. 924 psi, -25.3° , 800 psi
 6-113. 7.81 ksi
 6-114. 293 kPa (C)
 6-115. 293 kPa (C)
 6-117. 326 kPa (T)
 6-118. 2.60 MPa (T)
 6-119. $(\sigma_{\text{latón}})_{\max} = 3.04$ MPa, $(\sigma_{ac})_{\max} = 4.65$ MPa, $\sigma_{\text{latón}} = 1.25$ MPa, $\sigma_{ac} = 2.51$ MPa
 6-121. $(\sigma_{ac})_{\max} = 3.70$ MPa, $(\sigma_{\text{mad}})_{\max} = 0.179$ MPa
 6-122. $(\sigma_{al})_{\max} = 27.6$ ksi, $(\sigma_{p})_{\max} = 4.60$ ksi
 6-123. $(\sigma_{ac})_{\max} = 1.40$ ksi, $(\sigma_{\text{mad}})_{\max} = 77.0$ psi
 6-125. 1.53 ksi
 6-126. $(\sigma_{\text{conc}})_{\max} = 1.95$ ksi, $(\sigma_{ac})_{\max} = 18.3$ ksi
 6-127. 97.5 kip · pie
 6-129. 155 lb · pulg
 6-130. 1.16 ksi (T)
 6-131. $\sigma_A = 10.6$ ksi (T), $\sigma_B = 12.7$ ksi (C)
 6-133. 842 psi (T)
 6-134. 1.14 kip · pie
 6-135. $\sigma_A = 792$ kPa (C), $\sigma_B = 1.02$ MPa (T)
 6-137. $(\sigma_t)_{\max} = 366$ psi, $(\sigma_c)_{\max} = -321$ psi, $(\sigma_t)_{\max} = (\sigma_c)_{\max} = 341$ psi
 6-138. 4.77 MPa
 6-139. 204 psi (T), 120 psi (C)
 6-141. $\sigma_A = 446$ kPa (T), $\sigma_B = 224$ kPa (C), No debido a la concentración de esfuerzos en la pared
 6-142. 14.0 kN · m
 6-143. 43.1 lb · pie
 6-145. 27.0 MPa
 6-146. 97.2 N · m
 6-147. $M = 286$ lb · pie, $M' = 176$ lb · pie
 6-149. 749 psi
 6-150. 950 mm
 6-151. 8.0 mm
 6-153. 15.0 kip · pie
 6-154. 12.0 ksi
 6-155. 122 lb
 6-157. 8.25 kip · pie
 6-158. $z = 845(10^{-6})$ m³, $K = 1.17$
 6-159. 43.5 MPa
 6-161. 142 MPa
 6-162. $K = 1.70$, $Z = \frac{4r^3}{3}$
 6-163. $M_Y = 63.6$ kip · pie, $M_P = 108$ kip · pie
 6-165. $Z = 114$ pulg³, $K = 1.78$
 6-166. $Z = 570(10^{-6})$ m³, $K = 1.16$
 6-167. 172 kip · pie
 6-169. $Z = \frac{bh^2}{12}$, $K = 2$
 6-170. $M_Y = 18$ kip · pie, $M_P = 36$ kip · pie
 6-171. $Z = bt(h-t) + \frac{t}{4}(h-2t)^2$,

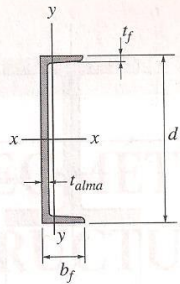
$$K = \frac{3h}{2} \left[\frac{4bt(h-t) + t(h-2t)^2}{bh^3 - (b-t)(h-2t)^3} \right]$$

 6-173. a) 25.0 kN, b) 37.5 kN
 6-174. 18.0 kip/pie, 22.8 kip/pie
 6-175. a) $w = 4.27$ kip/pie, b) $w = 6.40$ kip/pie
 6-177. 9.03 kN · m
 6-178. 73.5 kip · pie
 6-179. 81.7 kip · pie
 6-181. $M = \frac{nbh^2}{2(2n+1)} \sigma_{\max}$
 6-182. 14.9 kN · m
 6-183. 26.4 kN · m
 6-185. 635 kPa
 6-186. $Z = 0.963(10^{-3})$ m³, $K = 1.22$
 6-187. 55.0 MPa
 6-189. $\sigma_A = 225$ kPa (C), $\sigma_B = 265$ kPa (T)
 6-190. $V_{\max} = -233$ N, $M_{\max} = -50$ N · m
 6-191. 8.41 ksi



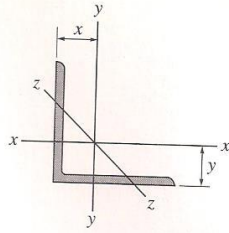
Secciones de patín ancho o perfiles W Unidades inglesas

Designación	Área A	Peralte d	Espesor del alma t _{alma}	Patín		Eje x-x			Eje y-y		
				ancho b _f	espesor t _f	I	S	r	I	S	r
pulg × lb/pie	pulg ²	pulg	pulg	pulg	pulg	pulg ⁴	pulg ³	pulg	pulg ⁴	pulg ³	pulg
W12 × 87	25.6	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
W12 × 50	14.7	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
W12 × 45	13.2	12.06	0.335	8.045	0.575	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94
W12 × 26	7.65	12.22	0.230	6.490	0.380	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
W12 × 22	6.48	12.31	0.260	4.030	0.425	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
W12 × 16	4.71	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W12 × 14	4.16	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W10 × 100	29.4	11.10	0.680	10.340	1.120	623	112	4.60	207	40.0	2.65
W10 × 54	15.8	10.09	0.370	10.030	0.615	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
W10 × 45	13.3	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
W10 × 39	11.5	9.92	0.315	7.985	0.530	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
W10 × 30	8.84	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
W10 × 19	5.62	10.24	0.250	4.020	0.395	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
W10 × 15	4.41	9.99	0.230	4.000	0.270	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W10 × 12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W8 × 67	19.7	9.00	0.570	8.280	0.935	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12
W8 × 58	17.1	8.75	0.510	8.220	0.810	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
W8 × 48	14.1	8.50	0.400	8.110	0.685	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
W8 × 40	11.7	8.25	0.360	8.070	0.560	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
W8 × 31	9.13	8.00	0.285	7.995	0.435	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
W8 × 24	7.08	7.93	0.245	6.495	0.400	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
W8 × 15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
W6 × 25	7.34	6.38	0.320	6.080	0.455	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
W6 × 20	5.87	6.20	0.260	6.020	0.365	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
W6 × 16	4.74	6.28	0.260	4.030	0.405	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
W6 × 15	4.43	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.46
W6 × 12	3.55	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
W6 × 9	2.68	5.90	0.170	3.940	0.215	1.64	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905



Canales americanas estándar o perfiles C Unidades inglesas

Designación	Área A	Peralte d	Espesor del alma t _{alma}		Patín				Eje x-x			Eje y-y		
					ancho b _f		espesor t _f		I	S	r	I	S	r
pulg × lb/pie	pulg ²	pulg	pulg		pulg		pulg		pulg ⁴	pulg ³	pulg	pulg ⁴	pulg ³	pulg
C15 × 50	14.7	15.00	0.716	1/16	3.716	3 3/4	0.650	5/8	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867
C15 × 40	11.8	15.00	0.520	1/2	3.520	3 1/2	0.650	5/8	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886
C15 × 33.9	9.96	15.00	0.400	3/8	3.400	3 3/8	0.650	5/8	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904
C12 × 30	8.82	12.00	0.510	1/2	3.170	3 1/8	0.501	1/2	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763
C12 × 25	7.35	12.00	0.387	3/8	3.047	3	0.501	1/2	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780
C12 × 20.7	6.09	12.00	0.282	5/16	2.942	3	0.501	1/2	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799
C10 × 30	8.82	10.00	0.673	1/16	3.033	3	0.436	7/16	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669
C10 × 25	7.35	10.00	0.526	1/2	2.886	2 7/8	0.436	7/16	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676
C10 × 20	5.88	10.00	0.379	3/8	2.739	2 3/4	0.436	7/16	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692
C10 × 15.3	4.49	10.00	0.240	1/4	2.600	2 5/8	0.436	7/16	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713
C9 × 20	5.88	9.00	0.448	7/16	2.648	2 5/8	0.413	7/16	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642
C9 × 15	4.41	9.00	0.285	3/16	2.485	2 1/2	0.413	7/16	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661
C9 × 13.4	3.94	9.00	0.233	1/4	2.433	2 3/8	0.413	7/16	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669
C8 × 18.75	5.51	8.00	0.487	1/2	2.527	2 1/2	0.390	3/8	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599
C8 × 13.75	4.04	8.00	0.303	5/16	2.343	2 3/8	0.390	3/8	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615
C8 × 11.5	3.38	8.00	0.220	1/4	2.260	2 1/4	0.390	3/8	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625
C7 × 14.75	4.33	7.00	0.419	7/16	2.299	2 1/4	0.366	3/8	27.2	7.78	2.51	1.38	0.779	0.564
C7 × 12.25	3.60	7.00	0.314	5/16	2.194	2 1/4	0.366	3/8	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571
C7 × 9.8	2.87	7.00	0.210	3/16	2.090	2 1/8	0.366	3/8	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581
C6 × 13	3.83	6.00	0.437	7/16	2.157	2 1/8	0.343	5/16	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525
C6 × 10.5	3.09	6.00	0.314	5/16	2.034	2	0.343	5/16	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529
C6 × 8.2	2.40	6.00	0.200	3/16	1.920	1 7/8	0.343	5/16	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537
C5 × 9	2.64	5.00	0.325	5/16	1.885	1 7/8	0.320	5/16	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489
C5 × 6.7	1.97	5.00	0.190	3/16	1.750	1 3/4	0.320	5/16	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493
C4 × 7.25	2.13	4.00	0.321	5/16	1.721	1 3/4	0.296	5/16	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450
C4 × 5.4	1.59	4.00	0.184	3/16	1.584	1 5/8	0.296	5/16	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449
C3 × 6	1.76	3.00	0.356	3/8	1.596	1 5/8	0.273	1/4	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416
C3 × 5	1.47	3.00	0.258	1/4	1.498	1 1/2	0.273	1/4	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410
C3 × 4.1	1.21	3.00	0.170	3/16	1.410	1 3/8	0.273	1/4	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404



Ángulos de lados iguales Unidades inglesas

Tamaño y espesor pulg	Peso por pie lb	Área A pulg ²	Eje x-x				Eje y-y				Eje z-z
			I pulg ⁴	S pulg ³	r pulg	y pulg	I pulg ⁴	S pulg ³	r pulg	x pulg	r pulg
8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
8 × 8 × 3/4	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
8 × 8 × 1/2	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
6 × 6 × 3/4	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
6 × 6 × 1/2	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
6 × 6 × 3/8	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19
5 × 5 × 3/4	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975
5 × 5 × 1/2	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
5 × 5 × 3/8	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
4 × 4 × 3/4	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
4 × 4 × 1/2	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
4 × 4 × 3/8	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
4 × 4 × 1/4	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795
3 1/2 × 3 1/2 × 1/2	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
3 1/2 × 3 1/2 × 3/8	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
3 1/2 × 3 1/2 × 1/4	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
3 × 3 × 1/2	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
3 × 3 × 3/8	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587
3 × 3 × 1/4	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592
2 1/2 × 2 1/2 × 1/2	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487
2 1/2 × 2 1/2 × 3/8	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487
2 1/2 × 2 1/2 × 1/4	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491
2 × 2 × 3/8	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389
2 × 2 × 1/4	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391
2 × 2 × 1/8	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398